# Leçon 201 : Espaces de fonctions. Exemples et applications.

# I Fonctions continues à support compact

## 1 Propriétés des fonctions

- Notion de convergence uniforme, exemples sur un ensemble non compact
- Stabilité par limite uniforme de la continuité
- Théorème de Heine
- Théorème des bornes atteintes

## 2 Propriété de l'espace

- $(\mathcal{C}([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach
- Théorème de Weierstrass via les polynômes de Bernstein
- Application : $\forall n, \int_0^1 x^n f = 0 \implies f = 0$
- Convolution, approximation de l'unité
- DEV 1 : Théorème de Weierstrass par la convolution

# II Espaces $L^p$

## 1 Construction

- Espace $\mathcal{L}^p$, $\|\cdot\|_p$ est une semi-norme
- Passage au quotient par la relation d'égalité presque partout pour que $\|\cdot\|_p$ soit une norme

## 2 Propriétés de l'espace

- DEV 2 : $(L^p, \|\cdot\|_p)$ est un Banach
- Pas d'inclusion entre ces espaces sauf en masse finie
- $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}) \subset L^p$ et $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R})$ est dense dans $L^p$
- $L^p$ est un Hilbert ssi $p = 2$

## 3 Convolution

- Les cas où la convolution est bien définie
- Approximation de l'unité dans $L^p$, comment en construire

# III Transformation de Fourier

## 1 Généralités

- $f \in L^1 \implies \widehat{f} \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R})$, lien entre régularité et comportement à l'infini de $f$ et $\widehat{f}$
- Formules avec la convolution, la dérivée
- Transformée de Fourier de la gaussienne

## 2 Inversion de Fourier

- Formule d'inversion
- Corollaire : la transformation de Fourier est une application injective
- Prolongement à $L^2$