

# Leçon 141 : Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

## I Polynômes irréductibles

### 1 Définitions et premières propriétés

- Définition et exemples
- Cas du degré  $\leq 3$
- Polynômes irréductibles de  $\mathbb{R}[X]$  et  $\mathbb{C}[X]$
- Si  $P$  est irréductible sur  $\mathbb{K}$ , alors  $\mathbb{K}[X]/(P)$  est un corps

### 2 Critères d'irréductibilité

- **DEV 1 : Lemme des contenus +  $P$  irréductible sur  $\mathbb{Z} \implies P$  irréductible sur  $\mathbb{Q}$  + Critère d'Eisenstein +  $\phi_p$  irréductible sur  $\mathbb{Z}$**
- Si  $\bar{P}$  est irréductible unitaire sur  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ , alors il l'est sur  $\mathbb{Z}$

## II Polynômes irréductibles et extensions de corps

### 1 Eléments algébriques

- Définition
- Notion de polynôme minimal
- Critères d'algébricité
- L'ensemble des nombres algébriques sur un corps est un corps, algébriquement clos si le surcorps l'est

## 2 Corps de rupture/décomposition

- Définition, existence et unicité
- $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$  est un corps de rupture mais pas de décomposition de  $X^3 - 2$
- $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}[X]/(X^2 + 1)$
- Notion de clôture algébrique

## 3 Construction des corps finis

- Comme corps de décomposition puis comme corps de rupture
- Exemples
- Inclusion des  $\mathbb{F}_{2^n}$

## III Polynômes cyclotomiques

- Définition de racine primitive de l'unité
- Définition des polynômes cyclotomiques, quelques propriétés
- $[\mathbb{Q}(\mathbb{U}_n) : \mathbb{Q}] = \varphi(n)$
- **DEV 2 : Intersection de 2 corps cyclotomiques**