Théorème d'Ascoli

Loïc PLU

Juillet 2025

<u>Recasages :</u>

- 201 : Espaces de fonctions
- 203 : Utilisation de la notion de compacité
- 205 : Espaces complets
- 208 : Espaces vectoriels normés
- 228 : Continuité, dérivabilité

<u>Références :</u>

- Francis Hirsch et Gilles Lacombe, éléments d'analyse fonctionnelle, DUNOD p.37

Introduction

Le théorème d'Ascoli est un théorème important au programme de l'agrégation. Il est nécessaire d'avoir une idée de la démonstration, même s'il n'est pas choisi comme développement. L'application proposée n'est pas sourcée mais provient d'un TD de San Vũ Ngọc faisant intervenir le théorème du graphe fermé et le théorème de compacité de Riesz.

Résultats préalables

On rappelle dans un premier temps la notion de compacité.

Rappels *:*

⋆ *Une partie K d'un espace métrique est compacte ssi toute suite de K possède une suite extraite convergente dans K (propriété de Bolzano-Weierstrass) ssi de tout recouvrement de K par des ouverts, on peut extraire un sous-recouvrement fini (propriété de Borel-Lebesgue).*

⋆ *On dit que K est relativement compacte si $\bar{K}$ est compacte.*

On se donne un espace métrique compact (X,d), et on se place dans $\mathcal{C}(X,\mathbb{K})$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On prend $A \subset \mathcal{C}(X,\mathbb{K})$ non vide.

Définition 1 *On dit que A est équicontinue si*

$$\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, y \in X, d(x,y) < \eta \Rightarrow \forall f \in A, \, |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Remarque 1 ⋆ *A finie $\Rightarrow$ A équicontinue.*

⋆ *Si A est une suite de fonctions équicontinue et si A converge simplement alors A converge uniformément.*

Théorème 1 (Riesz) *Soit E un evn. E est de dimension finie ssi la boule unité fermée $\overline{B_E(0,1)}$ est compacte.*

Démonstration (Riesz) $\boxed{\Rightarrow}$ *En dimension finie, les compacts sont les fermés bornés.*

$\boxed{\Leftarrow}$ *$\overline{B_E(0,1)}$ est compacte donc d'après la propriété de Borel-Lebesgue, $\exists (x_1, \ldots, x_n), B_E(\bar{0}, 1) \subset \cup_{i=1}^{n} B(x_i, \frac{1}{2})$ puis on vérifie que $E = Vect(x_1, \ldots, x_n)$.*

Théorème 2 (Graphe fermé) *Soit $T : E \to F$ une application linéaire entre 2 espaces de Banach. Alors T est continue ssi $\Gamma_T := \{(x, T(x) : x \in E\}$ est fermé.*

Démonstration (Graphe fermé) $\boxed{\Rightarrow}$ *Si E est fermé et T est continue alors* Γ_T *est fermé.*
$\boxed{\Leftarrow}$ *On utilise le théorème d'isomorphisme de Banach qui nous dit que si* $T : E \to F$ *est linéaire, continue et bijective, alors* T^{-1} *est continue. On l'applique à* $p_1 : \begin{array}{ccc} \Gamma_T & \to & E \\ (u, T(u)) & \mapsto & u \end{array}$ *qui est une bijection linéaire continue donc* $T = p_2 \circ p_1^{-1}$ *est continue avec* $p_2 : \begin{array}{ccc} (E,F) & \to & F \\ (u,v) & \mapsto & v \end{array}$ *qui est naturellement continue.*

Développement

On rappelle que A est une partie de $\mathcal{C}(X, \mathbb{K})$ non vide où (X,d) est un espace métrique compact.

Théorème 3 (Ascoli) *A est relativement compacte (i.e. $\bar{A}$ compact)* $\Leftrightarrow$ *A est bornée et équicontinue.*

Démonstration (Ascoli) $\boxed{\Rightarrow}$ *Supposons que A soit relativement compacte. A est bornée car* $(\mathcal{C}(X, \mathbb{K}), \| .\|_\infty)$ *est métrique.* *Mq : A est équicontinue.*
Soit $\varepsilon > 0$
$\bar{A}$ *est compacte donc il existe I fini tel que*

$$\exists (f_i)_{i \in I} \in A^I,\ A \subset \underset{i \in I}{\cup} B(f_i, \frac{\varepsilon}{3}).$$

$(f_i)_{i \in I}$ *est une famille finie de fonctions continues donc est équicontinue donc*

$$\exists \eta > 0, \forall x, y \in X, d(x,y) < \eta \Rightarrow |f_i(x) - f_i(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

donc d'après ce qui précède, on a que pour tout $f \in A$ *il existe* $i \in I$ *tel que pour tout* $x, y \in X$, *on ait*

$$\begin{array}{lll} d(x,y) < \eta & \Rightarrow & |f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_i(x)| + |f_i(x) - f_i(y)| + |f_i(y) - f(y)| \\ & & < 3 \times \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{array}$$

donc A est équicontinue.

$\boxed{\Leftarrow}$ *Supposons que A soit bornée et équicontinue.*
On va montrer que toute suite de A admet une sous-suite convergente dans $\bar{A}$ (propriété de Bolzano-Weierstrass). L'espace X est compact donc séparable donc il contient une suite séparable dense $D := (d_k)_{k\in\mathbb{N}}$.
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$.
Pour tout élément d_k de D, la suite $(f_n(d_k))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée par $\sup\limits_{f\in A}\|f\|$ donc elle admet une sous-suite convergente c'est-à-dire qu'il existe $\varphi_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ croissante telle que $(f_{\varphi_k(n)}(d_k))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. En posant $\Psi : n \mapsto \varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_n(n)$, on obtient que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite numérique $(f_{\Psi(n)}(d_k))_{n\in\mathbb{N}}$ converge or D est dense dans X donc la suite de fonctions $(f_{\Psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f, or A étant équicontinue, la convergence est même uniforme et la limite f est continue donc $f \in \bar{A}$. $\square$

Application 1 *Soit V un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Alors V est de dimension finie.*

Démonstration (App) *Pour montrer que V est de dimension finie, on va montrer que la boule unité fermée $\overline{B_V(0,1)}$ est compacte. Pour cela on va lui appliquer le théorème d'Ascoli.*

V est un sev fermé du Banach $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, c'est donc aussi un Banach. De plus, si on prend une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V^{\mathbb{N}}$ telle que $f_n \underset{n\to\infty}{\to} f$ alors $f \in V$ et $f_n \underset{n\to\infty}{\to} f'$. On en déduit que le graphe $\Gamma := \{(f,f') : f \in V\}$ est fermé. Alors, d'après le théorème du graphe fermé, l'application linéaire $D : \begin{array}{ccc} V & \to & f(V) \\ f & \mapsto & f' \end{array}$ est continue. Ainsi

$$\exists C > 0, \forall f \in V, \|f'\| \leq C\|f\|.$$

La partie $\overline{B_V(0,1)}$ de $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ est naturellement bornée. Montrons qu'elle est équicontinue.

Soit $\varepsilon > 0$. On prend $\eta := \frac{\varepsilon}{C}$.

On applique le théorème des accroissements finis à tout $f \in \overline{B_V(0,1)}$. On a donc que pour tout $x < y \in [0,1]$ tels que $|x-y| < \eta$,

$$\exists z \in]x,y[, |f(x) - f(y))| = |f'(z)|(y-x) \leq C \times 1 \times \frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon.$$

On en déduit que $\overline{B_V(0,1)}$ *est équicontinue, donc d'après le théorème d'Ascoli,* $\overline{B_V(0,1)}$ *est compacte. On peut donc appliquer le théorème de Riesz pour conclure que* V *est de dimension finie.*