

$$df(x) \in O(E)$$

Fixons E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie.

Théorème 1 Soit $f : E \rightarrow E$ de classe $\mathcal{C}^1$ Alors f est une isométrie affine si et seulement si $df(x) \in O(E)$ pour tout $x \in E$.

Preuve 2 $\Rightarrow$ Si f est une isométrie affine, elle s'écrit $f = u + b$ avec $u \in O(E)$ et $b \in E$. Alors pour $x, h \in Z$ on a $df(x).h = u(h)$ donc df est une isométrie en tout point.

$\Leftarrow$ Réciproquement, on va montrer que localement f est une isométrie puis on étendra par connexité.

Soit $a \in E$.

Étape 1 : Montrons qu'il existe un voisinage $U_a \in \mathcal{V}(a)$ ouvert tel que tout $x, y \in U_a$ vérifie $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$.

D'une part, pour tout $x, y \in E$, $[x, y] \subset E$ donc par l'inégalité des accroissements finis

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \sup_{c \in]x, y[} \|df(c)\| \|x - y\| = \|x - y\| \text{ car } df(c) \in O(E) \text{ donc } \|df(c)\| = 1 \text{ pour tout } c \in]x, y[.$$

De plus, $df(a)$ est inversible car c'est une isométrie donc par le théorème d'inversion locale il existe $V_a \in \mathcal{V}(a)$ et $W_a \in \mathcal{V}(f(a))$ des ouverts tels que $f : V_a \rightarrow W_a$ est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme. On a $f^{-1} : W_a \rightarrow V_a$ et si $y \in W_a$ et $x \in V_a$ tel que $y = f(x)$ alors $d(f^{-1})(y) = (df(x))^{-1}$. Or il existe $R > 0$ tel que $B := B(f(a), R) \subset W_a$. On fixe alors $U_a := f^{-1}(B)$. Pour $x, y \in U_a$ on a donc $[f(x), f(y)] \subset B$ d'où par inégalité des accroissements finis :

$$\|x - y\| = \|f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(y))\| \leq \sup_{c \in]f(x), f(y)[} \|df(c)\| \|f(x) - f(y)\| = \|f(x) - f(y)\|.$$

Par double inégalité on retrouve bien $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$ pour tout $x, y \in U_a$.

Étape 2 : Montrons que pour tout $x, y \in U_a$, $df(x) = df(y)$.

Par hypothèse on a $\langle f(x) - f(y) \mid f(x) - f(y) \rangle = \langle x - y \mid x - y \rangle$.

En différenciant pour x , on a pour $h \in E$ $2\langle df(x).h \mid f(x) - f(y) \rangle = 2\langle h \mid x - y \rangle$.

On différencie maintenant pour y , on a donc pour $k \in E$ $\langle df(x).h \mid df(y).k \rangle = \langle h \mid k \rangle$.

Ainsi on a

$$\begin{aligned} \|df(x).h - df(y).h\|^2 &= \|df(x).h\|^2 - 2\langle df(x).h \mid df(y).h \rangle + \|df(y).h\|^2 \\ &= 2\|h\|^2 - \langle h \mid h \rangle \quad \text{Car } df(x) \text{ et } df(y) \text{ sont des isométries} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc $df(x) = df(y)$.

Étape 3 : Conclusion.

On pose $A := \{x \in E \mid df(x) = df(0)\}$. Alors,

- A est fermé dans E car f est de classe $\mathcal{C}^1$.
- $A \neq \emptyset$ car $0 \in A$.

- A est ouvert dans E car si $a \in A$, il existe $U_a \in \mathcal{V}(a)$ ouvert tel que pour tout $x \in U_a$ on ait $df(x) = df(y)$ d'où $U_a \subset A$.

Or E est connexe par arc donc connexe donc $A = E$.

$$E \longrightarrow E$$

On pose alors $g : x \longmapsto f(x) - \underbrace{df(0)}_{=: u \in O(E)} . x$. On a alors $dg = 0$ donc il existe $b \in E$ tel que $f = u + b$

et f est une isométrie affine.

Remarques :

- Ce développement est assez court, il ne faut pas hésiter à bien détailler les passages subtiles.
- Savoir retrouver la preuve de l'inégalité des accroissements finis vectorielle
- Savoir redémontrer connexe par arc $\implies$ connexe et les idées du TIL.