Transformée de Fourier d'une fraction rationnelle

Théorème 1. *Si P et Q sont deux polynômes premiers entre eux avec* $\deg Q \geq \deg P + 1$ *et tels que Q n'admet pas de zéros réels, alors pour $t > 0$*

$$\mathfrak{F}\left(\frac{P}{Q}\right)(t) = 2\mathrm{i}\pi \sum_{\omega \in \mathcal{Z}_+} \operatorname{Res}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\frac{P(x)}{Q(x)}, \omega\right) \tag{1}$$

où $\mathcal{Z}_+ = Q^{-1}(\{0\}) \cap \{\Im z > 0\}$.

Démonstration. Soit $R \geq 0$ et K_R le demi-disque supérieur fermé tel que tous les zéros de partie imaginaire positive de Q soient dans l'intérieur de K_R. Les points de $\mathcal{Z}_+$ sont des pôles. D'après le théorème des résidus

$$\int_{\partial K_R} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\frac{P(x)}{Q(x)}dx = 2\mathrm{i}\pi \sum_{\omega \in \mathcal{Z}_+} \operatorname{Res}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\frac{P(x)}{Q(x)}, \omega\right).$$

Soit, en paramétrant le bord de K_R par le demi-cercle $\gamma_R \colon \theta \to R\mathrm{e}^{i\theta}$ et le segment $[-R, R]$

$$\int_{\gamma_R} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tz}\frac{P(z)}{Q(z)}dz + \int_{-R}^{R} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tz}\frac{P(z)}{Q(z)}dz = 2\mathrm{i}\pi \sum_{\omega \in \mathcal{Z}_+} \operatorname{Res}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\frac{P(x)}{Q(x)}, \omega\right).$$

Nous avons

$$\int_{\gamma_R} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tz}\frac{P(z)}{Q(z)}dz = \int_0^{\pi} \exp\left(\mathrm{i}tR\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right) \frac{P\left(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)}{Q\left(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)} iR\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}d\theta.$$

Or par hypothèse sur le degré, $z \mapsto z\frac{P(z)}{Q(z)}$ reste borné en module, disons par $M \geq 0$. Ainsi

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\gamma_R} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tz}\frac{P(z)}{Q(z)}dz\right| &\leq M \int_0^{\pi} \left|\exp\left(\mathrm{i}tR\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\right| d\theta \leq M \int_0^{\pi} \exp(-Rt\sin\theta)d\theta \\
&\leq 2M \int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp(-Rt\sin\theta)d\theta \leq 2M \int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp\left(-\frac{2Rt}{\pi}\theta\right) d\theta \\
&\leq 2M \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{2Rt}{\pi}\theta\right) d\theta \leq \frac{M\pi}{Rt}.
\end{aligned}$$

Et donc cela permet d'écrire

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tz}\frac{P(z)}{Q(z)}dz = 0.$$

Il en découle

$$\int_{\mathbf{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\frac{P(x)}{Q(x)}dx = 2\mathrm{i}\pi \sum_{\omega\in\mathcal{Z}_+} \mathrm{Res}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\frac{P(x)}{Q(x)}, \omega\right).$$

Le cas $t < 0$ est analogue en intégrant sur le demi-cercle inférieur

$$\int_{\mathbf{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\frac{P(x)}{Q(x)}dx = 2\mathrm{i}\pi \sum_{\omega\in\mathcal{Z}_-} \mathrm{Res}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\frac{P(x)}{Q(x)}, \omega\right).$$

$\square$