Méthode de Laplace

Nico

En guise d'introduction, je préfère prévenir que vous vous apprêtez à assister au développement d'un monstre. Je doute garder ce développement, mais j'avais envie de le rédiger !

Comme prérequis, il est attendu de savoir ce résulat bien connu de la gaussienne :

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2}\ dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \tag{1}$$

Connaître la fonction Γ, notamment que pour tout x positif : $\Gamma(x+1) = \int\limits_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt$

Ainsi que connaître le théorème de convergence dominée et la formule de Taylor-Young. Bon amusement !

Méthode de Laplace : Soit $[a;b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que :

1. $\exists! x_0 \in]a;b[$ où f atteint son maximum
2. f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur un voisinage de x_0, et l'on a $f''(x_0) \neq 0$

On a alors :

$$\int\limits_a^b e^{tf(x)}\ dx \underset{t\to+\infty}{\sim} e^{tf(x_0)}\sqrt{\frac{2\pi}{t|f''(x_0)|}}$$

En guise d'application, on se propose de généraliser la formule de Stirling sur $\mathbb{R}$ avec cet équivalent simple de la fonction Γ :

$$\Gamma(x+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x$$

Démonstration. Etape 0 : Prenons un peu de recul...
Tout d'abord, les hypothèses sur f nous donne que $f''(x_0) < 0$ puisque f atteint son maximum en x_0 [(1)]. De plus, par (1)

$$\int_{\mathbb{R}} \exp\left(\frac{f''(x_0)x^2}{2}\right)dx = \sqrt{\frac{2\pi}{|f''(x_0)|}} \tag{2}$$

On comprend alors qu'on va devoir se ramener à étude autour de x_0. Par hypothèse, il existe un voisinage de x_0 autour duquel f est $\mathcal{C}^2$. Ainsi, pour $x \to x_0$, puisque $f'(x_0) = 0$

$$f(x) =_{x \to x_0} f(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2) \tag{3}$$

Etape 1 : Réduire l'étude de la fonction autour d'un voisinage bien choisi
L'allure local de Young nous force à considérer des intervalles plus petits autour de x_0. Montrons que l'on peut ramener l'étude à un intervalle $I = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ pour $\delta > 0$, tant que $I \subseteq [a; b]$

Soit alors un tel $\delta > 0$

$$\int_a^b e^{tf(x)}\ dx = \int_{[x_0-\delta, x_0+\delta]} e^{tf(x)}\ dx + \int_{|x-x_0|>\delta} e^{tf(x)}\ dx$$

Par continuité de f et hypothèse 1., $\mu := \sup\{f(x) : |x - x_0| > \delta\} < f(x_0)$. Ainsi, par continuité, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f \geq \nu > \mu$ sur $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subseteq I$ où ν désigne le min de f sur cet intervalle. On a alors que

$$\int_{[x_0-\delta, x_0+\delta]} e^{tf(x)}\ dx \geq^{(2)} \int_{[x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]} e^{tf(x)}\ dx \geq 2\varepsilon e^{t\nu}$$

Or

$$\int_{|x-x_0|>\delta} e^{tf(x)}\ dx \leq (b - a)e^{t\mu}$$

Puisque $\mu < \nu$, on a que

$$\int_{|x-x_0|>\delta} e^{tf(x)}\ dx =_{t \to +\infty} o\left(\int_{[x_0-\delta, x_0+\delta]} e^{tf(x)}\ dx\right)^{(3)} \tag{4}$$

(1). f atteignant son maximum en x_0, elle est croissante juste avant de l'atteindre, puis décroissante. On a alors que la dérivée s'annule en x_0, est positive avant et négative après. Donc la dérivée est décroissante sur un voisinnage de x_0. Donc f'' est négative sur un voisinnage de x_0
(2). par positivité de la fonction exponentielle, l'intervalle étant plus petit, l'aire sous la courbe est plus petite.
(3). $e^{t(\mu-\nu)} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$

Etape 2 : Etude local autour de x_0

Soit $\varepsilon > 0$, par (3), il existe $\delta > 0$ tel que $\forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \beta(x)(x - x_0)^2$$

Où $|\beta(x)| \leq \varepsilon$ sur $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. On notera $I_\delta(t) = \int_{[x_0-\delta,x_0+\delta]} e^{tf(x)}\, dx$. Alors

$$I_\delta(t) = \int_{[x_0-\delta,x_0+\delta]} \exp\left(t\left(f(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \beta(x)(x - x_0)^2\right)\right) dx$$

On pose $u = \sqrt{t}(x - x_0)$, on a alors que :

$$I_\delta(t) = \frac{e^{tf(x_0)}}{\sqrt{t}} \underbrace{\int_{-t\delta}^{t\delta} \exp\left(\left(\frac{f''(x_0)}{2} + \beta\left(\frac{u + \sqrt{t}x_0}{\sqrt{t}}\right)\right)u^2\right) du}_{J_\delta(t)} \tag{5}$$

Etape 3 : Equivalent de J_δ par TCVD et conclusion

On considère la fonction $g(t, u) = \exp\left(\left(\frac{f''(x_0)}{2} + \beta\left(\frac{u + \sqrt{t}x_0}{\sqrt{t}}\right)\right)u^2\right) \mathbb{1}_{[-t\delta,t\delta]}(u)$.

On a que :

1. $\forall u \in \mathbb{R},\ g(t, u) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \exp\left(\frac{f''(x_0)}{2}u^2\right)$
2. $\forall u \in \mathbb{R},\ \forall t > 0,\ |g(t, u)| \leq \exp\left(\left(\frac{f''(x_0)}{2} + \varepsilon\right)u^2\right)$ qui est intégrable dès lors que $\varepsilon < \left|\frac{f''(x_0)}{2}\right|$

Ainsi, par théorème de convergence dominée et (2),

$$\lim_{t\to+\infty} J_\delta(t) = \int_{\mathbb{R}} \exp\left(\frac{f''(x_0)u^2}{2}\right) du = \sqrt{\frac{2\pi}{|f''(x_0)|}}$$

D'où par (4) et (5) :

$$\int_a^b e^{tf(x)}\, dx \underset{t\to+\infty}{\sim} I_\delta(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} e^{tf(x_0)}\sqrt{\frac{2\pi}{t|f''(x_0)|}}$$

□

Démonstration. Application :

$$\Gamma(x+1) = \int\limits_0^{+\infty} t^x e^{-t}\ dt$$

On pose $u = \frac{t}{x}$, alors :

$$\Gamma(x+1) = x \int_0^{+\infty} (ux)^x e^{-ux} du = x^{x+1} \int_0^{+\infty} e^{x(\ln u - u)} du$$

Soit $f(u) = \ln u - u$, vérifons que f vérifie les conditions de la méthode de Laplace. Déjà, f est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$. : Soit $u > 0$.

$f'(u) = \frac{1}{u} - 1 = \frac{1-u}{u}$. Or $f'(u) \geq 0 \Longleftrightarrow 1 - u \geq 0 \Longleftrightarrow u \leq 1$. D'où f admet un unique maximum en $x_0 = 1$, et $f(1) = -1$.

$f''(u) = -\frac{1}{u^2}$ et $f''(1) = -1 \neq 0$. D'où par la méthode de Laplace :

$$\Gamma(x+1) \underset{x\to+\infty}{=\sim} x^{x+1} e^{-x} \sqrt{\frac{2\pi}{x}} = \sqrt{2\pi x} \left(\frac{x}{e}\right)^x.$$

□

Référence

Humbert, Tristan (2023). *Méthode de l'analyse aux concours.* Calvage & Mounet, p. 190.

!! le développement du livre est truffé d'erreurs. C'est donc sympa pour faire la démo une première fois comme ça on doit réfléchir, mais à fuir pour l'oral d'agreg...

Recasages

- Leçon 218 : Formules de Taylor. Exemples et applications.

- Leçon 224 : Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.

- Leçon 239 : Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.