Dunford par Newton

Nico

On se place dans $\mathbb{C}$. On admet l'existence et l'unicité de la décomposition de Dunford pour toute matrice à coefficients dans $\mathbb{C}$.

On souhaite mettre en place un algorithme permettant de trouver cette décomposition

Décomposition de Dunford par "méthode de Newton" : Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$, χ_A son polynôme caractéristique. On se donne la décomposition de Dunford de A : $A = D + N$
On pose $P = \dfrac{\chi_A}{\chi_A \wedge \chi_A'}$ et on définit par récurrence la suite :

$$(A_r)_r : \left\{ \begin{array}{lcl} A_0 & = & A \\ A_{r+1} & = & A_r - P(A_r)P'(A_r)^{-1} \end{array} \right. \quad \forall r \in \mathbb{N}$$

Alors $A_r \xrightarrow[r\to+\infty]{} D$. De plus, $(A_r)_r$ est stationnaire pour tout $r \geq \log_2(n)$

Démonstration. Etape 1 : Montrons que P est bien défini et nouvelle écriture

Puisque $\mathbb{C}$ est de caractéristique nulle, on a que $\chi_A' \neq 0$. Donc $\chi_A \wedge \chi_A'$ n'est pas nul. De plus, $\mathbb{C}$ est algébriquement clos donc χ_A est scindé. Enfin, on a que $\chi_A \wedge \chi_A' | \chi_A$, d'où P est un polynôme.
Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_t$ les valeurs propres distinctes de A ($t \leq n$). Alors $\forall i \in [\![1, t]\!]$, on pose $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $Q(\lambda_i) \neq 0$ et tel que $\chi_A = (X - \lambda_i)^{m_i} Q(X)$ où $m_i \geq 1$ est la multiplicité algébrique de λ_i. Alors on a que

$$\chi_A' = m_i(X-\lambda_i)^{m_i-1}Q(X)+(X-\lambda_i)^{m_i}Q'(X) = (X-\lambda_i)^{m_i-1}(m_iQ(X)+(X-\lambda_i)Q'(X))$$

Ainsi, on constate que $\forall i,\ \lambda_i$ est de multiplicité $m_i - 1$ dans χ_A'.
De ce fait, $\chi_A \wedge \chi_A' = \prod\limits_{i=1}^{t} (X - \lambda_i)^{m_i-1}$. D'où :

$$P(X) = \prod_{i=1}^{t} X - \lambda_i \tag{1}$$

Etape 2 : Etude de $(A_r)_r$

Montrons par récurrence sur $r \in \mathbb{N}$ la proposition suivante :

$$(\mathcal{P}_r) : \begin{cases} \text{(i)} & P(A_r) \text{ est nilpotente, d'indice de nilpotence } \nu_r \leq 1 + \dfrac{n-1}{2^r} \\ \text{(ii)} & P'(A_r) \text{ est inversible} \\ \text{(iii)} & A_{r+1} \text{ est bien définie et est un polynôme en } A \end{cases} \quad \forall r \in \mathbb{N}$$

Initialisation : Montrons que $(\mathcal{P}_0)$ est vraie

i) $P^n(X) = \prod_{i=1}^{t} (X - \lambda_i)^n$ par (1)

D'où $\chi_A | P^n$ et donc par Cayley Hamilton, $P(A)^n =^{(1)} P^n(A) = 0$. Il en vient que $P(A_0)$ est nilpotente d'indice de nilpotence $\nu_0 \leq n = 1 + \dfrac{n-1}{2^0}$.

ii) Par (1), tous les λ_i sont de multiplicité 1 dans P. Donc $\forall i$, $P'(\lambda_i) \neq 0$. Or $\mathrm{Spec}(P'(A)) = P'(\mathrm{Spec}(A))$ [(2)]. D'où 0 n'est pas valeur propre de $P'(A)$ et donc $P'(A)$ n'est pas inversible.

iii) Pour toute matrice inversible B, B^{-1} est un polynôme en B [(3)]. Donc A_1 est bien définie comme polynôme en A

Hérédité : Fixons un entier naturel r tel que $(\mathcal{P}_r)$ est vraie. On note (H_r) l'hypothèse de récurrence. Montrons que $(\mathcal{P}_{r+1})$ est vraie.

i) $P(A_{r+1}) = P\left(A_r - P(A_r)P'(A_r)^{-1}\right)$. Elle est bien définie et polynomiale en A par (H_r).

Or par formule de Taylor polynomiale à l'ordre 2, pour tout $a, h \in \mathbb{C}$, on a que

$$P(a+h) = P(a) + hP'(a) + h^2 \frac{P''(a)}{2}$$

D'où pour toute fonction polynomiale S, pour tout $x \in \mathbb{C}$

$$P(x + S(x)) = P(x) + S(x)P'(x) + S(x)^2 \frac{P''(x)}{2}$$

Puisque $\mathbb{C}$ est infini, on peut identifier S comme un élément de $\mathbb{C}[X]$ et il vient alors que :

$$P(X + S(X)) = P(X) + S(X)P'(X) + S(X)^2 \frac{P''(X)}{2}$$

(1). $\Phi_A \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C}[X] & \to & M_n(\mathbb{C}) \\ P & \mapsto & P(A) \end{array} \right.$ est un morphisme d'algèbre

(2). A est trigonalisable donc pour une matrice triangulaire sup T, et une matrice inversible Q,$P'(A) = QP'(T)Q^{-1}$

(3). Cela se montre par Cayley Hamilton

Alors en posant $S = P(X)T(X)$ où T est un polynôme tel que $T(A_r) = P'(A_r)^{-1}$ et en évaluant en A_r, on obtient que :

$$P(A_{r+1}) = P(A_r) - S(A_r)P'(A_r) + S(A_r)^2Q(A_r) = S(A_r)^2Q(A_r)$$

Où $Q \in \mathbb{C}[X]$.
Or par (H_r), $P(A_r)$ est nilpotente d'indice de nilpotence $\nu_r \leq 1 + \dfrac{n-1}{2^r}$, donc $P(A_{r+1})$ est nilpotente d'indice de nilpotence

$$\nu_{r+1} \leq \frac{\nu_r + 1}{2} \leq 1 + \frac{n-1}{2^{r+1}}$$

ii) On a que $P \wedge P' = 1$, donc par le théorème de Bézout, il existe $U, V \in \mathbb{C}[X]$ tels que :

$$P(X)U(X) + P'(X)V(X) = 1$$

Donc en isolant les termes en P' et en évaluant en A_{r+1} :

$$P'(A_{r+1})V(A_{r+1}) = I_n - P(A_{r+1})U(A_{r+1})$$

On a que $P(A_{r+1})$ est nilpotente par (i), et donc $P(A_{r+1})U(A_{r+1})$ est nilpotente. Or toute matrice de la forme $I_n - N$ où N est nilpotente, est inversible. Donc $\det(P'(A_{r+1})V(A_{r+1})) \neq 0$, et donc $\det P'(A_{r+1}) \neq 0$, d'où inversible.

iii) Par le même argument que l'initialisation, ce point est vrai.

Conclusion : $(\mathcal{P}_r)$ est initialisée à $r = 0$ et est héréditaire. Elle est donc vraie $\forall r \in \mathbb{N}$

Etape 3 : $(A_r)_r$ est stationnaire à partir d'un certain rang

Montrons que $(A_r)_r$ est stationnaire à partir d'un certain rang :
Soit $r_0 \geq \log_2(n)$, alors par étape 2,

$$\nu_{r_0} \leq 1 + \frac{n-1}{2^{r_0}} \leq 1 + \frac{n-1}{2^{\log_2(n)}} = 1 + \frac{n-1}{n} < 2$$

Donc $P(A_{r_0})$ est nilpotente d'indice de nilpotence 1. Autrement dit, c'est la matrice nulle. Donc $\forall r \geq \log_2(n)$, $A_{r+1} = A_r$. D'où la suite est stationnaire à partir d'un rang r_0

Etape 4 : Bilan

Finalement, on a que P est un polynôme annulateur de A_{r_0}, scindé à racines simples et unitaire par (1). D'où A_{r_0} est diagonalisable.

De plus,

$$A - A_{r_0} = (A_0 - A_1) + (A_1 - A_2) + \ldots + (A_{r_0-1} - A_{r_0}) = \sum_{r=0}^{r_0} P(A_r)P'(A_r)^{-1}$$

Par étape 2, par commutativité de $\mathbb{C}[A]$, et par binôme de Newton, $A - A_{r_0}$ est nilpotente.
Toujours par étape 2, $A_{r_0}, A - A_{r_0} \in \mathbb{C}[A]$ donc les matrices commutent entre elles.
D'où par unicité de la décomposition de Dunford :

$$A_{r_0} = D \text{ et } A - A_{r_0} = N$$

□

Questions de jury ?

Voici quelques questions en lien avec le développement :

Question 1. *Qu'en est-il pour un corps quelconque en caractéristique nulle ? En caractéristique non nulle ?*

Question 2. *Donner la complexité d'un tel algorithme*

Question 3. *Donner un algorithme pour déterminer si une matrice est diagonalisable ou non*

Question 4. *Justifier pourquoi pour toute matrice inversible M, M^{-1} est un polynôme en M*

Question 5. *Justifier pourquoi dans un corps infini $\mathbb{K}$ on peut identifier $\mathbb{K}[X]$ à l'ensemble des fonctions polynomiales. Peut-on le faire dans un corps fini ?*

Question 6. *En déduire un énoncé de Taylor Polynomiale pour un corps infini $\mathbb{K}$*

Question 7. *Montrer que pour toute matrice nilpotente N, $I_n - N$ est inversible.*

Question 8. *Montrer que $\mathbb{C}[A]$ est commutatif*

Question 9. *Montrer qu'en caractéristique nulle, pgcd$(P, P') = 1$*

Références

[Cal19] Philippe Caldero. *Carnet de voyage en Algébrie.* Calvage & Mounet, 2019, p. 58.

Recasages

Leçon 150 - Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

Leçon 152 - Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

Leçon 154 - Exemples de décompositions de matrices. Applications.

Leçon 156 - Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.