Formes de Hankel

Nico

Prérequis : Dualité dans $\mathbb{C}_n[X]$, invariance du rang par extension de corps, déterminant de Vandermonde.

Théorème : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Il existe une forme quadratique réelle de signature (p,q) telle que le nombre de racines distinctes de P est $p+q$, et le nombre de racines réelles distinctes de P est $p-q$.

Notons n le degré de P, soit $1 \leq t \leq n$ tel que $x_1, \ldots, x_t$ soient les racines de P, où les x_k sont de multiplicités m_k. Soit $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $S_k = \sum_{i=1}^{t} m_i x_i^k$, $S_0 = n$. On considère l'application :

$$Q : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C},\ (X_0, \ldots, X_{n-1}) \mapsto \sum_{0 \leq i,j \leq n-1} S_{i+j} X_i X_j$$

Montrons que Q est une forme quadratique sur $\mathbb{C}^n$, et définit une forme quadratique $Q_{\mathbb{R}}$ sur $\mathbb{R}^n$.

Démonstration. Q définit une forme quadratique sur $\mathbb{C}^n$ car Q est un polynôme homogène de degré 2 sur $\mathbb{C}$. Cela se voit bien si l'on écrit Q de cette manière :

$$Q(X_0, \ldots, X_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} S_{2i} X_i^2 + 2 \sum_{0 \leq i,j \leq n-1} S_{i+j} X_i X_j$$

Puisque $P \in \mathbb{R}[X]$, et que les S_k sont des polynômes symétriques en les racines de P, ils sont réels. On peut aussi le voir de cette manière : Soit $I \subseteq \{1, \ldots, t\}$ l'ensemble des indices où les x_i sont réels. $\{1, \ldots, t\} \backslash I$ est réunion disjointe de deux ensembles de mêmes valeurs J et J' de sorte que J contient une moitié des racines complexes non réelles, et J' leurs conjugués. Alors :

$$S_k = \sum_{i \in I} m_i x_i^k + \sum_{j \in J} m_j \underbrace{(x_j^k + \overline{x_j}^k)}_{=2\,\mathrm{Re}(x_j)}$$

D'où Q induit une forme quadratique réelle. $\square$

Soit alors $\varphi_k : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ la forme linéaire correspondant au polynôme homogène de degré 1 suivant : $P_k(X_0, \ldots, X_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} x_k^i X_i$ et soit (p, q) la signature de $Q_{\mathbb{R}}$. Montrons P admet $p + q$ racines distinctes.

Démonstration. Notons $(e_0, \ldots, e_{n-1})$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$ et $(e_i^*)_{0 \leq i \leq n-1}$ sa base duale. On a alors que pour tout k, $\varphi_k = \sum_{i=0}^{n-1} x_k^i e_i^*$. La matrice de $M_{n,t}(\mathbb{C})$ ainsi obtenue est :

$$A := \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & \cdots & x_t \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & \cdots & x_t^{n-1} \end{pmatrix}$$

Le mineur formé des t premières lignes est un déterminant de Vandermonde :

$$\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & \cdots & x_t \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{t-1} & \cdots & x_t^{t-1} \end{vmatrix} = \prod_{i \neq j} (x_i - x_j)$$

Qui est non nul car les x_i sont distincts deux à deux. D'où A est de rang t. D'où la famille $(\varphi_i)_i$ est libre sur $\mathbb{C}$. Or :

$$\sum_{k=1}^{t} m_k \varphi_k^2(X_0, \ldots, X_{n-1}) = \sum_{k=1}^{t} m_k \left(2 \sum_{i \neq j} x_k^{i+j} X_i X_j + \sum_{i=0}^{n-1} x_k^{2i} X_i^2 \right) = Q(X_0, \ldots, X_{n-1})$$

Ainsi, par réduction de Gauss, le rang de Q est égale à t car les φ_k sont linéairement indépendants. La matrice de Q dans une base de $\mathbb{C}^n$ est la même que celle de $Q_{\mathbb{R}}$ dans une base de $\mathbb{R}^n$. Par invariance du rang par extension de corps, le rang de cette matrice est le même sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$. Donc Q et $Q_{\mathbb{R}}$ ont même rang. Donc $p + q = t$. $\square$

On montre enfin que le nombre de racines réelles distinctes de P est $p - q$.

Démonstration. Soit $k \in [\![1, t]\!]$. On s'intéresse dans un premier temps à la signature sur $\mathbb{R}^n$ de la forme quadratique $\varphi_k^2 + \overline{\varphi_k}^2$.

1. Si $x_k \in \mathbb{R}$, alors $\varphi_k^2 + \overline{\varphi_k}^2 = 2\varphi_k^2$. Sa signature est de $(1, 0)$.

2. Si $x_k \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, $\varphi_k^2 + \overline{\varphi_k^2} = 2\operatorname{Re}(\varphi_k)^2 - 2\operatorname{Im}(\varphi_k)^2$, d'où il s'agit bien d'une forme quadratique réelle. Et puisque $x_k \notin \mathbb{R}$, $x_k \neq \overline{x_k}$, et donc si l'on regarde la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x_k & \overline{x_k} \\ \vdots & \vdots \\ x_k^{n-1} & \overline{x_k}^{n-1} \end{pmatrix} \in M_{2,n}(\mathbb{C})$$

Le mineur extrait des deux premières lignes vaut $\overline{x_k} - x_k$, qui est donc non nul. D'où la matrice est de rang 2. D'où $\operatorname{Re}(\varphi_k)$ et $\operatorname{Im}(\varphi_k)$ sont non colinéaires sur $\mathbb{C}$. d'où $\varphi_k^2 + \overline{\varphi_k}^2$ est de rang 2 dans $\mathbb{C}$. Toujours par invariance du rang par extension de corps, son rang dans $\mathbb{R}$ est aussi de 2. D'où la signature est de $(1,1)$

On sait que $Q = \sum_{k=1}^{t} m_k \varphi_k^2$, où les φ_k sont linéairement indépendants. Il vient que :

$$Q = \sum_{k\in I} m_k \varphi_k^2 + \sum_{k\in J} m_k(\varphi_k^2 + \overline{\varphi_k}^2)$$

Notons ainsi $r = |I|$ le nombre de racines réelles distinctes. Il vient que :

$$(p,q) = (r,0) + \left(\frac{t-r}{2}, \frac{t-r}{2}\right) = \left(\frac{t+r}{2}, \frac{t-r}{2}\right)$$

D'où $r = p - q$. □

En guise d'illustration des formes de Hankel, on peut voir ce qui se passe pour un polynômes de degré 2 :

Soit $P = aX^2 + bX + c$, $a \neq 0$. On a que $S_0 = 2$. Par relation coefficients racines, $S_1 = -\frac{b}{a}$ et $S_2 = \frac{b^2}{a^2} - 2\frac{c}{a} = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$

D'où $Q(X_1, X_2) = 2X_1^2 - 2\frac{b}{a}X_1X_2 + \frac{b^2-2ac}{a^2}X_2^2$. On obtient sa réduction de Gauss en appliquant l'algorithme de Gauss :

$$Q(X_1,X_2) = 2(X_1 - \frac{b}{2a}X_2)^2 - \frac{2b^2}{4a^2}X_2^2 + \frac{b^2-2ac}{a^2}X_2^2 = 2(X_1 - \frac{b}{2a}X_2)^2 + \frac{b^2-4ac}{2a^2}X_2^2$$

Notons $\Delta := b^2 - 4ac$. Par ce qu'on a fait au préalable :

1. Si $\Delta > 0$, Q est de signature $(2,0)$ et donc P admet 2 racines réelles.
2. Si $\Delta = 0$, Q est de signature $(1,0)$ et donc P admet 1 racine réelle de multiplicité 2.
3. Si $\Delta < 0$, Q est de signature $(1,1)$ et donc P admet 0 racine réelle.

Question 1. *Calculer les sommes de Newton. Montrer le lien avec les polynomes symétriques élémentaires.*

Question 2. *Justifier que les polynômes symétrique en les racines d'un polynôme réel, sont réels.*

Question 3. *Calculer le déterminant de Vandermonde.*

Question 4. *Montrer que les mineurs d'une matrice caractérisent le rang.*

Question 5. *Montrer que le rang est invariant par extension de corps.*

Question 6. *Soit un polynôme* aX^2+bX+c *réel. Déterminer son nombre de racines réelles. De même pour un polynôme de degré* 3.

Référence

CALDERO, Philippe et Jérôme GERMONI (2017). *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries.* Calvage & Mounet, p. 356.

Recasages

Leçon 144 : Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Exemples et applications.

Leçon 159 : Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.

Leçon 170 : Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité. Applications.

Leçon 171 : Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications.