Leçon 155 : Exponentielle de matrices. Applications.

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. [MM22]

I Propriétés de l'exponentielle de matrice

Lemme 1. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $M_n(\mathbb{K})$, $(M_n(\mathbb{K}), \|\cdot\|)$ est un espace de Banach.

Thm 2. La série $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{A^k}{k!}$ converge dans $M_n(\mathbb{K})$.

Déf 3. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, on appelle exponentielle de matrice de A, notée $\exp(A)$ ou e^A, la série de fonctions $\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$.

Ex 4. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $e^A = \cosh(1) I_2 + \sinh(1) A$.

Ex 5. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $e^A = \cos(1) I_2 + \sin(1) I_2$.

Prop 6. $\forall A \in M_n(\mathbb{K})$, ${}^t(e^A) = e^{{}^tA}$ et $\overline{e^A} = e^{\overline{A}}$.

Prop 7. Soient $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ et $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telles que $A = PBP^{-1}$, alors $e^A = Pe^B P^{-1}$

Cor 8. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$, $\det e^A = e^{\mathrm{Tr}(A)}$.

Prop 9. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, $e^A \in \mathbb{K}[A]$.

Thm 10. Soient $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = BA$, alors $e^{A+B} = e^A e^B$.

Cor 11. Soient $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, si A et B commutent, e^A et e^B commutent.

Cor 12. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, $e^A \in GL_n(\mathbb{K})$, d'inverse e^{-A}.

Ex 13. Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique, alors $e^A \in O_n(\mathbb{R})$.

II Exponentielle et réduction

II.1 Matrices nilpotentes

Prop 14. Si $N \in M_n(\mathbb{K})$ est nilpotente, d'indice de nilpotence p, alors $\exp(N) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{N^k}{k!}$

Ex 15. Soit $J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$, alors $e^{J_n} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \cdots & \frac{1}{n!} \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{1}{2!} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

Déf 16. Soit $N \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente d'indice p. Le logarithme de la matrice $I_n + N$ est la matrice $\ln(I_n + N) = \sum_{k=1}^{p-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} N^k$

Prop 17. Soit $N \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente d'indice p. Alors $\exp(N) - I_n$ et $\ln(I_n + N)$ sont nilpotentes, et

$$e^{\ln(I_n+N)} = I_n + N, \ \ln(e^N) = N$$

Cor 18. Soit $N \in M_n(\mathbb{K})$ nilpotente vérifiant $e^N = I_n$. Alors $N = 0$.

II.2 Matrices diagonalisables

Prop 19. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, alors $\exp(diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)) = diag(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n})$.

Thm 20. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ diagonalisable, alors e^A est diagonalisable, et $\mathrm{Spec}(e^A) = \{e^\lambda : \lambda \in \mathrm{Spec}(A)\}$.

Rq 21. Ce résultat est faux dans $M_n(\mathbb{C})$, il faut supposer de plus que la matrice est inversible.

II.3 Décomposition de Dunford

Prop 22. Si la décomposition de Dunford de A est $D + N$, alors e^A admet une décomposition de Dunford qui est $e^A = e^D + e^D(e^N - I_n)$

Cor 23 (Surjectivité de l'exponentielle de matrices complexes)**.** Pour tout $A \in GL_n(\mathbb{C})$, il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $A = e^{P(A)}$.

III Étude de fonction

Prop 24. $\exp : M_n(\mathbb{K}) \to GL_n(\mathbb{K})$ est continue.

Prop 25. $\exp : M_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$ est de classe $\mathcal{C}^1$, entre autre, elle est différentiable en 0 et $D\exp(0) = \mathrm{Id}$.

Thm 26 (DEV 1 - surjectivité de l'exponentielle)**.** $\exp : M_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$ est surjective.

C-ex 27. $\exp : M_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas surjective, considérer $A = diag(-1, -2)$.

Prop 28. $\exp(M_n(\mathbb{R})) = ?$

Rq 29. Pour $n \geq 2$, $\exp : M_n(\mathbb{K}) \to GL_n(\mathbb{K})$ n'est pas injective, considérer $\exp(2\pi \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}) = \exp I_2$.

IV Applications

IV.1 Décomposition polaire

Lemme 30 (DEV 2)**.** Pour tout $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $|||S|||_2 = \rho(S)$, où $\rho(S)$ désigne le rayon spectral de S.

Thm 31 (DEV 2)**.** $\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme.

Cor 32. Pour tout $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, il existe une unique matrice $T \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $T^2 = S$

Thm 33 (Décomposition polaire)**.** L'application $O_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R})$, $(O, S) \mapsto OS$ est un homéomorphisme.

Cor 34. Pour tout $A \in M_n(\mathbb{R})$, il existe $(O, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telles que $A = OS$.

App 35. Pour tout $M \in M_n(\mathbb{R})$, $|||M|||_2^2 = \rho({}^tMM)$.

App 36. Soit G un sous-groupe compacte de $GL_n(\mathbb{R})$ contenant $O_n(\mathbb{R})$. Alors $G = O_n(\mathbb{R})$.

App 37. Tout hyperplan de $M_n(\mathbb{R})$ contient une matrice orthogonale.

IV.2 Systèmes différentiels linéaires

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Lemme 38. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. La fonction $t \mapsto e^{tA}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $t \mapsto Ae^{tA} = e^{tA}A$.

Déf 39. Un système différentiel linéaire est une équation

$$Y' = A(t)Y + B(t)$$

d'inconnue $Y : I \to M_{n,1}(\mathbb{K})$, de coefficients $A : I \to M_n(\mathbb{R})$ et de second membre $B : I \to M_{n,1}(\mathbb{R})$.

Rq 40. Une équa diff scalaire linéaire d'ordre n de la forme $\sum_{k=0}^{n} a_k(t) y^{(k)} = b(t)$ se réecrit $Y = AY + B$, avec $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n+1)} \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_{n-1} \end{pmatrix}$

Et $B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$

Bibliographie

[MM22] Roger Mansuy et Rached Mneimé. *Algèbre linéaire. Réduction des endormorphismes*. 2022.