Simplicité de $\mathrm{PSL}_n(\mathbb{K})$

Loïc PLU

Juillet 2025

Recasages :

- 103 : Conjugaison dans un groupe
- 106 : Groupe linéaire
- 108 : Génération d'un groupe
- 159 : Formes linéaires et dualité

Références :

- Daniel Perrin, Cours d'algèbre, Ellipses p.102

Introduction

Ce théorème est un résultat fondamental de la théorie des groupes. Ma démonstration sera axée sur les propriétés géométriques des transvections, faisant un lien direct avec les formes linéaires de la leçon 159.

Résultats préalables

On se donne $\mathbb{K}$ un corps et E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension $n \geq 3$.

Définition 1 Soit H un hyperplan de E d'équation $f \in E^* \setminus \{0\}$ (i.e. $H = \mathrm{Ker}(f)$), $a \in H$, $D := \mathrm{Vect}(a)$. On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est une transvection d'hyperplan H et de droite a si $u = \mathrm{id} + f.a$ c'est-à-dire

$$\forall x \in E, u(x) = x + f(x)a.$$

On note alors $u = \tau_{a,f}$. On définit ensuite $SL_n(\mathbb{K})$ par le groupe engendré par les transvections de E .

Remarque 1 On a entre autres que $SL_n(K)$ est le noyau du morphisme $\det : GL_n(K) \rightarrow K^*$.

Proposition 1 Soit $f \in E^* \setminus \{0\}$, $H := \text{Ker}(f)$, $a \in H$, $D := \text{Vect}(a)$, $u := \tau_{a,f}$ et $v \in GL_n(K)$.
Alors vuv^{-1} est une transvection d'hyperplan $v(H)$ et de droite $v(D)$ ie $vuv^{-1} = \tau_{v(a), f \circ v^{-1}}$

Démonstration (proposition 1) On a $\forall x \in E$, $u(v^{-1}(x)) = v^{-1}(x) + f(v^{-1}(x))a$ donc $vuv^{-1}(x) = x + f(v^{-1}(x))v(a)$ donc $vuv^{-1} = \tau_{v(a), f \circ v^{-1}}$.

Proposition 2 Les transvections sont conjuguées dans $SL_n(K)$.

Démonstration On remarque que dans une base adaptée de E (contenant a ,

une base de $\text{Ker}(f)$ et un vecteur d'image 1 par f), $\text{Mat}(\tau_{a,f}) = \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi on remarque aisément que toutes les transvections sont conjuguées dans $GL_n(K)$. Alors si on prend 2 transvections u et v , on peut trouver $w \in GL_n(K)$

tel que $uwu^{-1} = v$. Comme $\det(w) \neq 0$, $n \geq 3$ et que de plus $s := \begin{pmatrix} 1 & & & (0) \\ & \ddots & & \\ & & \det(w) & \\ (0) & & & \frac{1}{\det(w)} \end{pmatrix}$

(dans la base adaptée de v) commute avec v , on a que $sw \in SL_n(K)$ et ainsi $(sw)u(sw)^{-1} = v$. $\square$

On remarque que le centre de $SL_n(K)$ est le groupe des homothéties de rapport une racine n^{ieme} de l'unité et on le note $Z(SL_n(K))$. On définit le groupe projectif $PSL_n(K)$ par $SL_n(K)/Z(SL_n(K))$.

Développement

Théorème 1 Pour $n \geq 3$, le groupe $PSL_n(K)$ est simple.

Démonstration Les sous-groupes de $SL_n(K)$ contenant $Z(SL_n(K))$ sont en bijection avec les sous-groupes de $PSL_n(K)$. Pour un sous-groupe $\bar{N} \triangleleft PSL_n(K)$ non trivial, on peut donc considérer $N \triangleleft SL_n(K)$ associé à $\bar{N}$ et contenant strictement $Z(SL_n(K))$ (car $\bar{N}$ non trivial).

Idée :

- ★ Si N contient une transvection, N les contient toutes (car est distingué) alors $N = SL_n(K)$.
- ★ Si τ est une transvection d'hyperplan H , $\sigma\tau\sigma^{-1}$ est une transvection d'hyperplan $\sigma(H)$ donc $[\sigma, \tau] := \sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}$ est un produit de transvections et même une transvection si $\sigma(H) = H$ et $[\sigma, \tau] \neq id$.
- ★ On cherche donc à construire un élément de N laissant fixe un hyperplan.

Soit $\sigma \in N \setminus Z(SL_n(K))$.

σ n'est alors pas une homothétie, et il existe donc $a \in E$ tel que a ne soit pas colinéaire à $b := \sigma(a)$. On se donne $f \in E^* \setminus \{0\}$ telle que $f(a) = 0$, on pose $\tau := id + f.a$ une transvection de droite $\langle a \rangle$.

On définit alors $\rho := [\sigma, \tau]$ et on prend H un hyperplan contenant $\langle a, b \rangle$. $\sigma\tau\sigma^{-1}$ est alors une transvection de droite $\langle b \rangle$ donc il existe $g \in E^* \setminus \{0\}$ tel que $\sigma\tau\sigma^{-1} = id + g.b$ et donc $\rho(x) - x = \sigma\tau\sigma^{-1}(\tau^{-1}(x)) - x = \cancel{x} - f(x)a + g(x - f(x)a)b - \cancel{x} \in \langle a, b \rangle \subset H$. On en déduit que $\rho(H) \subset H$, donc $\rho(H) = H$.

Nous allons désormais distinguer 2 cas :

- 1^{er} cas : Il existe une transvection u d'hyperplan H ne commutant pas avec ρ . Alors $v := [\rho, u] \neq id$ est le produit des transvections $\rho u \rho^{-1}$ d'hyperplan $\rho(H) = H$ et de u^{-1} d'hyperplan H , donc v est une transvection or $v = \rho u \rho^{-1} u^{-1} \in N$ car $\rho \in N$ et $u \rho^{-1} u^{-1} \in N$ (car N distingué).
- 2^{ème} cas : ρ commute avec toutes les transvections d'hyperplan H . Alors on prend $f \in E^* \setminus \{0\}$ une équation de H (ie $H = \text{Ker}(f)$) et $u = id + f.c$ où $c \in H$. On a que $\rho u = u \rho$ donc

$$\forall x \in E, \rho(x) + f(x)\rho(c) = \rho(x) + f(\rho(x))c.$$

$$\begin{aligned}
\text{Ainsi } x \notin H &\Rightarrow \rho(x) - x \in H \\
&\Rightarrow f(\rho(x) - x) = 0 \\
&\Rightarrow f(\rho(x)) = f(x) \neq 0 \\
&\Rightarrow \rho(c) = c
\end{aligned}$$

Alors pour tout c dans H , $\rho(c) = c$ donc $\rho|_H = \text{id}$ or $\rho \neq \text{id}$ donc ρ est une transvection de N .

On a vu que dans tous les cas, N contient une transvection, donc contient toutes les transvections donc $N = SL_n(K)$ et $\bar{N} = PSL_n(K)$ et $PSL_n(K)$ est simple. $\square$