Permutations aléatoires

Loïc PLU

Juin 2025

Recasages :

- 105 : Groupe des permutations
- 261 : Loi d'une variable aléatoire
- 262 : Convergences d'une suite de variables aléatoires
- 264 : Variables aléatoires discrètes

Références : $\emptyset$

Introduction

Je suis tombé 2 fois sur ce développement, une première fois sur la leçon 262 en analyse/proba et une seconde sur la leçon 105 en algèbre. L'objectif de ce développement est de montrer la convergence en loi de la structure de cycle d'une suite de permutations aléatoires vers une loi de Poisson. Pour cela, on va déterminer la loi d'une permutation aléatoire à l'aide de sa fonction génératrice.

Résultats préalables

Définition 1 On appelle structure de cycle de la permutation aléatoire σ de $\mathfrak{S}_n$, le n -uplet $k = (k_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ de $\llbracket 0, n \rrbracket^n$ tel qu'on trouve k_i i -cycles dans la décomposition en cycles à support disjoint de σ .

On note $k =: C(\sigma)$ et pour tout i dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, $k_i =: C_i(\sigma)$

En particulier, pour une permutation σ , $C(\sigma)$ vérifie $\sum_{i=1}^n i C_i(\sigma) = n$ et la plupart des $C_i(\sigma)$ valent 0. Par exemple, si σ correspond à $(427)(361)$ alors $C(\sigma) = (1, 0, 2, 0, 0, 0, 0)$.

Proposition 1 Soit k une structure de cycle, alors il y a $n! \prod_{i=1}^n \frac{1}{j^{k_j}} \frac{1}{k_j!}$

Démonstration Il suffit de voir que 2 permutations sont conjuguées si et seulement si elles ont la même structure de cycle. Nous allons donc dénombrer l'orbite sous l'action par conjugaison, ce qu'on peut faire par la relation orbite/stabilisateur.

Si on prend $\tau = (a_{2,1}b_{2,1}) \dots (a_{2,k_2}b_{2,k_2})(a_{3,1}b_{3,1}c_{3,1}) \dots (a_{3,k_3}b_{3,k_3}c_{3,k_3}) \dots$ alors σ stabilise τ ssi $\tau = \sigma\tau\sigma^{-1} = (\sigma(a_{2,1})\sigma(b_{2,1})) \dots (\sigma(a_{2,k_2})\sigma(b_{2,k_2})) \dots$ donc ssi $(\sigma(a_{2,1})\sigma(b_{2,1}))$ correspond à un $(a_{2,i}b_{2,i})$, $(\sigma(a_{2,2})\sigma(b_{2,2}))$ correspond à un $(a_{2,i}b_{2,i})$ et ainsi de suite...

Il y donc j possibilités pour chacun des k_j j -cycles, qu'on peut ensuite permuter, donc $j^{k_j} k_j!$ possibilités pour chaque j .

Ainsi, il y a $\frac{|\mathfrak{S}_n|}{|\text{Stab}(\tau)|}$ permutations conjuguées à τ soit $n! \prod_{i=1}^n \frac{1}{j^{k_j}} \frac{1}{k_j!}$. $\square$

Développement

On cherche à démontrer le résultat suivant.

Théorème 1 Soit $\pi_n \sim \mathcal{U}(\mathfrak{S}_n)$ une suite de permutations aléatoires. Alors

$$\forall j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, C_j(\pi_n) \xrightarrow{L} \mathcal{P}(\lambda)$$

On introduit la notation pour $a, b \in \mathbb{N}, a^{[b]} := \frac{a!}{(a-b)!} \mathbf{1}_{\{b \leq a\}}$. On se donne $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $\pi_n \sim \mathcal{U}(\mathfrak{S}_n)$. On commence par démontrer le lemme suivant.

Lemme 1 Soit m un n -uplet d'entiers naturels tel que $\sum_{j=1}^n jm_j \leq n$. Alors

$$\mathbb{E}\left[\prod_{j=1}^n C_j(\pi_n)^{[m_j]}\right] = \prod_{j=1}^n \frac{1}{j^{m_j}}$$

Démonstration (Lemme) On développe la définition de l'espérance :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\prod_{j=1}^n C_j(\pi_n)^{[m_j]}\right] &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathbb{P}(\pi_n = \sigma) \prod_{j=1}^n C_j(\sigma)^{[m_j]} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}^n} \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n \\ c(\sigma)=k}} \frac{1}{n!} \prod_{j=1}^n k_j^{[m_j]} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}^n} \frac{1}{n!} \times n! \prod_{i=1}^n \frac{1}{i^{k_i}} \frac{1}{k_i!} \prod_{j=1}^n \frac{k_j!}{(k_j - m_j)!} \\ &= \prod_{j=1}^n \frac{1}{j^{m_j}} \sum_{k \in \mathbb{N}^n} \mathbb{P}(c(\pi_n) = k - m) \\ &= \prod_{j=1}^n \frac{1}{j^{m_j}}. \square \end{aligned}$$

On applique ce lemme au n -uplet particulier où $j, m \in \llbracket 1, n \rrbracket : (0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{rang } j}}{m}, 0, \dots)$

Dans ce cas, on obtient $\mathbb{E}[C_j(\pi_n)^{[m]}] = \frac{1}{j^m} \mathbf{1}_{\{jm \leq n\}}$.

Dans un second temps, on considère la fonction génératrice de la variable aléatoire $C_j(\pi_n)$ définie par $G :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$
 $t \mapsto \mathbb{E}[t^{C_j(\pi_n)}]$. Sachant que $C_j(\pi_n)$ est à valeur dans un ensemble fini, G est alors un polynôme et est donc prolongeable sur $\mathbb{R}$. On va l'étudier sur $]0, 2[$.
 Soit $t \in]0, 2[$.

$$\begin{aligned}
G(t) &= \mathbb{E}[t^{C_j(\pi_n)}] \\
&= \mathbb{E}[(t-1+1)^{C_j(\pi_n)}] && \text{or pour } \alpha \in \mathbb{N}, (1+x)^\alpha = \sum_{k \geq 0} \frac{\alpha^{[k]}}{k!} x^k \text{ sur }]-1,1[\\
&= \sum_{k \geq 0} \mathbb{E}[C_j^{[k]}] \frac{(t-1)^k}{k!} \\
&= \sum_{k \geq 0} \frac{1}{j^k} \mathbb{1}_{\{jk \leq n\}} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \frac{t^i (-1)^{k-i}}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{j} \rfloor} \frac{1}{j^k} \sum_{i=0}^k \frac{t^i (-1)^{k-i}}{i!(k-i)!} \\
&= \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{j} \rfloor} \frac{t^i}{j^i i!} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{j} \rfloor - i} \frac{(-1)^k}{k!} && \text{en intervertissant les indices de sommation} \\
&= \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{j} \rfloor} \mathbb{P}(C_j(\pi_n) = i) t^i
\end{aligned}$$

Ainsi on en déduit que pour tout i , on a

$$\mathbb{P}(C_j(\pi_n) = i) = \frac{1}{j^i i!} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{j} \rfloor - i} \frac{(-1)^k}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-\frac{1}{j}}}{j^i i!} = \mathbb{P}(\mathcal{P}(\frac{1}{j}) = i)$$

Enfin, une manière de conclure est de remarquer que toute fonction mesurable est une combinaison linéaire des $\mathbb{1}_{\{X=i\}}$ or on a démontré que

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{C_j(\pi_n)=i\}}] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\mathcal{P}(\frac{1}{j})=i\}}]$$

donc on a bien convergence pour toute fonction mesurable donc convergence en loi. $\square$

Conclusion

Ce développement peut être utilisé pour étudier les points fixes (cycles de longueur 1) dans des cas concrets lorsqu'on permute aléatoirement un grand nombre d'éléments. Le jury d'analyse m'a posé des questions sur la proposition 1, et m'a demandé d'appliquer le résultat à différentes tailles de cycles, et en particulier le cas où $j \rightarrow \infty$. Le jury d'algèbre m'a demandé de détailler la démonstration de la proposition 1 et d'expliquer plus en détail les calculs intervenant derrière le lemme 1.