Développement pour l'Agrégation externe de mathématiques
Analyse
Un développement asymptotique d'une intégrale dépendant d'un paramètre

Recasage(s)

Réference : Petit guide du calcul différentiel, Rouvière. C'est l'exercice 79.
214 : ★★★★★ 215 : ★★★★ 218 : ★★★★★ 224 : ★★★★★ 239 : ★★★★

Je l'avais mis en application du Théorème des Fonctions implicites dans la 214, (je l'avais pas en 215). On peut le mettre avant la méthode de Laplace dans le plan (si vous le mettez) dans la 218. Je l'avais mis dans une sous-partie (tout seul) dans la 224 le jour J. Et ça peut se mettre dans une partie développement asymptotique dans la 239, encore une fois, avant la méthode de Laplace. Il y a mieux comme développement dans la 215 et 239 mais c'est une option.

Théorème

Soient $0 < a < b$ deux réels fixés. Posons $f(x,\varepsilon) = (x-a)(b-x) + \varepsilon x^3$, alors :

1. Pour $\varepsilon > 0$ assez petit, l'équation $f(x,\varepsilon) = 0$ admet trois racines réelles distinctes $x_1(\varepsilon), x_2(\varepsilon)$ et $x_3(\varepsilon)$ telles que :

   $$x_1(\varepsilon) < x_2(\varepsilon) < x_3(\varepsilon)$$

   et on a le développement en 0 de $x_3(\varepsilon)$ suivant :

   $$x_3(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} - (a+b) - (a^2+ab+b^2)\varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

2. Pour $I(\varepsilon) = \int_{x_1(\varepsilon)}^{x_2(\varepsilon)} \frac{dx}{\sqrt{f(x,\varepsilon)}}$, on a le développement en 0 à deux termes suivant :

   $$I(\varepsilon) = \pi + \frac{3\pi}{4}(a+b)\varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

Démonstration. Preuve du premier point.
Puisque l'on a : $f(a,0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(x,\varepsilon) = a+b-2x+3\varepsilon x^2$ alors $\frac{\partial f}{\partial x}(a,0) = b-a > 0$, ainsi par le Théorème des Fonctions Implicites version C^2 (car f l'est) avec comme point $(a,0)$, il existe un voisinage V_1 de 0, un voisinage W_1 de a et $x_1 \in C^2(V_1, W_1)$ tels qu'on ait l'équivalence

suivante :

$$(\varepsilon \in V_1, x \in W_1 \text{ et } f(x,\varepsilon) = 0) \Leftrightarrow (\varepsilon \in V_1 \text{ et } x = x_1(\varepsilon))$$

Puisque x_1 est C^2, elle admet un DL_0 à l'ordre 2 :

$$x_1(\varepsilon) = x_1(0) + x_1'(0)\varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

Avec $x_1(0) = a$ de part l'équivalence. Pour calculer $x_1'(0)$, deux manière sont possibles : la formule explicite donnée par le Théorème des Fonctions Implicites ou "à la main" en dérivant par rapport à ε l'expression $f(x_1(\varepsilon),\varepsilon) = 0$. En pratique la deuxième est plus élèmentaire mais est plus longue et est plus calculatoire pour un développement qui l'est déjà suffisament. On utilisera ainsi la première (Rouvière utilise la seconde) :

$$x_1'(\varepsilon) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(x_1(\varepsilon),\varepsilon)}{\frac{\partial f}{\partial x}(x_1(\varepsilon),\varepsilon)}$$

d'où :

$$x_1'(0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(a),0)}{\frac{\partial f}{\partial x}(a,0)} = -\frac{a^3}{b-a}$$

Remarquons que l'hypothèse du Théorème apparait içi, assurant que $\frac{\partial f}{\partial x}(a,0)$ est non nulle. Finalement :

$$x_1(\varepsilon) = a - \frac{a^3}{b-a}\varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

En remarquant que $f(b,0) = 0$, on va avoir le même résultat sur l'existance d'une fonction x_2 d'un voisinage de 0 sur un voisinage de b de classe C^2 avec une différence sur le signe du terme en ε, ainsi :

$$x_2(\varepsilon) = b + \frac{b^3}{b-a}\varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

Enfin, de part l'expression, pour $\varepsilon > 0$ fixé :

$$f(x,\varepsilon) = \varepsilon x^3 - x^2 + (a+b)\varepsilon - ab$$

Les relations coefficients-racines donnent :

$$x_1(\varepsilon) + x_2(\varepsilon) + x_3(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \tag{1}$$

En utilisant les DL_0 obtenus précèdement, on obtient le résultat.

$$x_3(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} - (a+b) - (a^2+ab+b^2)\varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

Pour justifier les inéquations stricts sur les racines, puisque que l'on a isolés $x_1(\varepsilon)$ et $x_2(\varepsilon)$ dans un voisinage de a et b, avec ε assez petit, on la première inéquations car $a < b$. La dernière est clair car $\lim_{\varepsilon\to 0} x_3(\varepsilon) = +\infty$.
Preuve du second point.
Soit ε petit fixé. Pour simplifier les notations on considère pour $i \in [\![1,3]\!], x_i(\varepsilon) = x_i$. En écrivant : $f(x,\varepsilon) = \varepsilon(x-x_1)(x_2-x)(x_3-x)$, on va exprimer x_3 en fonction x_1 et x_2. Ainsi par (1), on a :

$$\begin{aligned} f(x,\varepsilon) &= \varepsilon(x-x_1)(x_2-x)(x_3-x) \\ &= (x-x_1)(x_2-x)(\varepsilon(\frac{1}{\varepsilon} - x_1 - x_2 - x)) \\ &= (x-x_1)(x_2-x)(1-\varepsilon(x+x_1+x_2)) \end{aligned}$$

On obtient ainsi :

$$I(\varepsilon) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{(1-\varepsilon(x+x_1+x_2))^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{(x-x_1)(x_2-x)}}dx$$

Qui est bien définie car intégrale de Riemann convergente en x_1 et x_2. Posons le C^1- difféomorphisme suivant :

$$\begin{array}{rccc} \varphi: &]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[& \longrightarrow &]x_1,x_2[\\ & t & \longmapsto & u+v\sin(t) \end{array}$$

où $u = \frac{x_1+x_2}{2}$ et $v = \frac{x_2-x_1}{2}$. En posant ainsi le changement de variable $x = u+v\sin(t)$, on obtient $dx = v\cos(t)dt$ et $(x-x_1)(x_2-x) = v^2\cos^2(t)$ donc :

$$\begin{aligned} I(\varepsilon) &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1-\varepsilon(u+v\sin(t)+x_1+x_2)^{-\frac{1}{2}}dt \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1-\varepsilon(3u+v\sin(t))^{-\frac{1}{2}}dt \end{aligned}$$

Posons $y = 3u+v\sin(t)$, dépendant de ε et de t. Le but de la suite de faire le DL quand ε tend vers 0 et $(1-\varepsilon y)^{-\frac{1}{2}}$ pour pouvoir l'intégrer par la suite. Par le premier point et l'inégalité de Taylor-Lagrange, $\exists C > 0$ telle que $|x_1 - a| < C\varepsilon$ et $|x_2 - b| < C\varepsilon$ donc :

$$\begin{aligned} \left|y - \frac{3}{2}(a+b) - \frac{b-a}{2}\sin(t)\right| &= \left|3u+v\sin(t) - \frac{3}{2}(a+b) - \frac{b-a}{2}\sin(t)\right| \\ &= \left|\frac{3}{2}(x_1-a+x_2-b) + \frac{\sin(t)}{2}(x_2-b+a-x_1)\right| \\ &\leq 2\frac{3}{2}C\varepsilon + |\sin(t)|\,2\frac{C}{2}\varepsilon \\ &\leq 4C\varepsilon \end{aligned}$$

On en déduit alors que $y = \frac{3}{2}(a+b) + \frac{b-a}{2}\sin(t) + r(t,\varepsilon)$ avec $|r(t,\varepsilon)| \leq 4C\varepsilon$ pour tout t. De plus, par l'inégalité de Taylor-Lagrange, $\exists D > 0$ telle que :

$$\forall z \in]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[, \left|(1-z)^{-\frac{1}{2}} - 1 - \frac{z}{2}\right| \leq Dz^2.$$

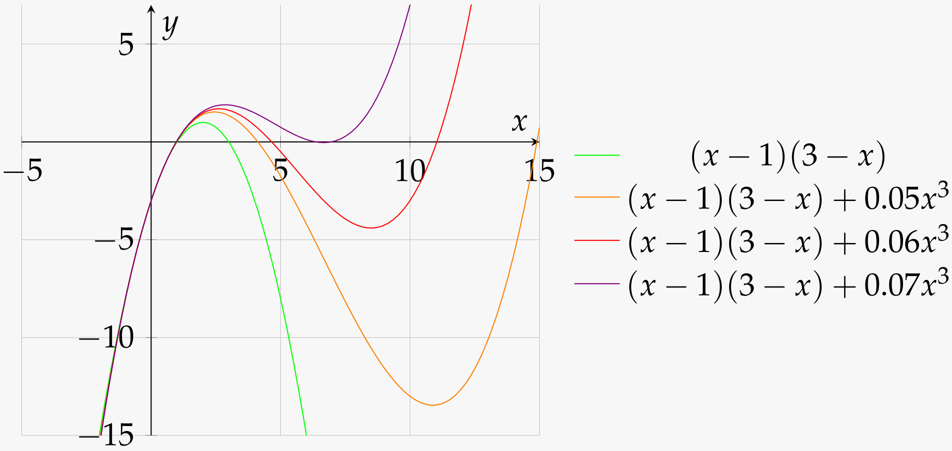
Remarque : l'intervalle choisie importe peu car εy est proche de zéro par le DL trouvé précédemment.
Ainsi : $(1-\varepsilon y)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{\varepsilon y}{2} + O(\varepsilon^2)$. On peut donc intégrer le développement limité, ainsi :

$$\begin{aligned} I(\varepsilon) &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \frac{3}{4}(a+b)\varepsilon + \frac{b-a}{4}\varepsilon\sin(t)dt + O(\varepsilon^2))dt \\ &= \pi + \frac{3\pi}{4}(a+b)\varepsilon + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

D'où le résultat.

□

Histoire et Heuristique



Quand ε est nul, on a affaire à un polynôme de degré 2, dont on connaît les racines de façons triviale. Mais quand $\varepsilon \neq 0$, même si ils existent des formules pour résoudre des équations du troisième degré par radicaux, les expressions ne sont pas facilement manipulables. L'idée de la preuve du second point, est de s'inspirer du cas $\varepsilon = 0$ pour calculer l'intégrale.