Leçon 152 : Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

$\mathbb{K}$ est un corps. E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$

I Généralité

I.1 Critères de diagonalisation

Déf 1. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de u s'il existe $x \in E\backslash\{0_E\}$ tel que $u(x) = \lambda x$.
On dit que $x \in E$ est un vecteur propre de u si $x \neq 0_E$ et il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$.
On appelle espace propre de λ, noté $E_\lambda := \mathrm{Ker}(u - \lambda Id_E)$, le sous-espace vectoriel de E engendré par les vecteurs propres de u associés à la valeur propre λ.

Déf 2.
- Un endomorphisme est diagonalisable s'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est diagonale.
- Une matrice est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.

Rq 3. Si $u \in \mathscr{L}(E)$ est diagonalisable, alors la base de E dans laquelle sa matrice est diagonale est formée des vecteurs propres de u. Entre autre, E est la somme directe des sous-espaces propres de u.

App 4. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Si A est diagonalisable, alors e^A est diagonalisable.

Prop 5. Une matrice est diagonalisable, si et seulement si, l'application linéaire qui lui est canoniquement associée est diagonalisable.

Prop 6. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que u admet n valeurs propres deux à deux distinctes. Alors, u est diagonalisable.

App 7 (Déterminant circulant)**.** Soit $P = \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i \in \mathbb{C}[X]$. Alors :

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{vmatrix} = \prod_{k=0}^{n-1} P(e^{\frac{2ik\pi}{n}})$$

Prop 8. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Notons χ_u son polynôme caractéristique. Si χ_u est scindé à racines simples, alors u est diagonalisable.

Ex 9. $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

C-ex 10. La réciproque est fausse. Considérer $u = \mathrm{Id}_E$ pour $n \geq 2$.

Lemme 11 (Lemme des noyaux)**.** Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ scindé, tel que sa décomposition en facteurs d'irréductibles est $P = P_1^{\alpha_1} \dots P_r^{\alpha_r}$. Alors :

$$\mathrm{Ker}(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}(P_i(u))^{\alpha_i}$$

Thm 12. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. u est diagonalisable, si et seulement si, u admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.

Ex 13. Les projecteurs et les symétries vectorielles sont diagonalisables.

Ex 14. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ diagonalisable. L'endomorphisme $G_A : M_n(\mathbb{K}) \to M_n(\mathbb{K})$, $M \mapsto AM$ est diagonalisable.

Cor 15. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Notons μ_u son polynôme minimal. Alors u est diagonalisable, si et seulement si, μ_u est scindé à racines simples.

Ex 16. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^5 = I_n$. En tant que matrice complexe, A est diagonalisable. En tant que matrice réelle, A est diagonalisable si et seulement si $A = I_n$.

Prop 17. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ diagonalisable, et soit F un sous-espace de E stable par u. Alors $u|_F$ est diagonalisable.

Thm 18 (Cayley-Hamilton)**.** Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Alors χ_u est un polynôme annulateur de u.

Cor 19. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. u est diagonalisable, si et seulement si, χ_u est scindé et la dimension de chaque sous-espace propre est égale à la multiplicité de la valeur propre dans χ_u.

Ex 20. $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

Cor 21. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. u est diagonalisable, si et seulement si, la somme des dimensions des sous-espaces propres de u est égale à $\dim E$.

I.2 Co-diagonalisation

Déf 22. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Une famille d'endomorphismes $(u_1, \dots, u_p)$ de E est co-diagonalisable s'il existe une base de E dans laquelle chacun des u_k admet une matrice diagonale.

Prop 23. Soient $u, v \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Si $u \circ v = v \circ u$, alors $\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$ est stable par v.

Thm 24. Soient $u_1, \dots, u_p$ des endomorphismes diagonalisables de E. Alors la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est co-diagonalisable, si et seulement si, les endomorphismes u_i et u_j commutent pour tout $i, j \in \{1, \dots, p\}$.

Ex 25. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ diagonalisables. Alors l'endomorphisme $ad_{A,B}$: $M_n(\mathbb{K}) \to M_n(\mathbb{K})$, $M \mapsto AM - MA$ est diagonalisable.

Cor 26. Soient $u, v \in \mathscr{L}(E)$ diagonalisables. Si v est un polynôme en u, alors u et v sont co-diagonalisables.

I.3 Décomposition de Dunford

Thm 27 (Décomposition de Dunford)**.** Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que χ_u est scindé dans $\mathbb{K}$. Alors il existe un unique couple $(d, n) \in \mathscr{L}(E)^2$ tels que :

1. $u = d + n$
2. d est diagonalisable
3. n est nilpotent
4. $d \circ n = n \circ d$

De plus, d et n sont des polynômes en u.

Rq 28. Si u est diagonalisable, alors sa décomposition de Dunford est $u = u + 0_E$.

Ex 29. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Si ad_A est diagonalisable, alors A est diagonalisable.

Prop 30. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Si la décomposition de Dunford de A est $D + N$, alors $e^A = e^D e^N$.

Cor 31. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ de polynôme caractéristique scindé. Alors A est diagonalisable, si et seulement si, e^A est diagonalisable.

Thm 32 (DEV 1)**.** Supposons que $\mathbb{K}$ est de caractéristique nulle. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ de polynôme caractéristique scindé, de décomposition de Dunford $D + N$. On pose $P := \dfrac{\chi_A}{\chi_A' \wedge \chi_A}$ et on considère la suite $(A_r)_r$ définie par $A_0 = A$, et $A_{r+1} = A_r - P(A_r)P'(A_r)^{-1}$. Alors cette suite est bien définie, est stationnaire pour tout $r \geq log_2(n)$, et tend vers D.

II Cas particuliers

II.1 Endomorphismes symétriques

E désigne ici un espace euclidien de dimension n, muni du produit scalaire $< \cdot, \cdot >$

Déf 33. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. u est dit symétrique, ou auto-adjoint, si $u = u^*$, autrement dit :

$$\forall x, y \in E, \; < u(x), y > = < x, u(y) >$$

Prop 34. $u \in \mathscr{L}(E)$ est symétrique, si et seulement si, sa matrice dans une base orthonormée de E est symétrique

Lemme 35. Si $u \in \mathscr{L}(E)$ est symétrique et F est un sous-espace de E, stable par u. Alors $F^\perp$ est stable par u

Thm 36 (Théorème spectral)**.** Si $u \in \mathscr{L}(E)$ est symétrique, alors il est diagonalisable en base orthonormée.

Notation 37. On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles. $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles positives. $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles définies positives.

Thm 38 (Théorème spectral, version matricielle)**.** Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Alors il existe $O \in O_n(\mathbb{R})$ et D diagonale telle que $S = {}^tODO$

C-ex 39. Ce résultat est faux pour les matrices symétriques complexes, considérer $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$

Cor 40. Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Alors $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, resp. $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, si et seulement si, ses valeurs propres sont positives, resp. strictement positives.

Thm 41 (DEV 2)**.** $\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme.

Cor 42. Pour tout $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, il existe une unique matrice $T \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $T^2 = S$

Cor 43 (Décomposition polaire)**.** L'application $O_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R})$, $(O, S) \mapsto OS$ est un homéomorphisme.

II.2 Matrices à coefficients dans un corps fini

Notons $\mathbb{F}_q$ un corps fini de cardinal q.

Thm 44. Soit $A \in M_n(\mathbb{F}_q)$. Alors A est diagonalisable, si et seulement si, $A^q = A$.

Thm 45. Soit $g_n = |GL_n(\mathbb{F}_q)|$. Alors le nombre de matrices diagonalisables dans $M_n(\mathbb{F}_q)$ est :

$$\sum_{n_1 + \ldots + n_q = n,\ n_i \geq 0} \frac{g_n}{\prod_{i=1}^{q} g_{n_i}}$$

III Topologie

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On munit $M_n(\mathbb{K})$ d'une norme quelconque.

Notation 46. On note $D_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonalisables. On note $T_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices trigonalisables.

Thm 47. $D_n(\mathbb{K})$ est dense dans $T_n(\mathbb{K})$. Entre autre, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\overline{D_n(\mathbb{C})} = M_n(\mathbb{C})$.

Lemme 48. L'application $M_n(\mathbb{K}) \to M_n(\mathbb{K})$, $A \mapsto \chi_A$ est continue.

Thm 49. $A \in M_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable, si et seulement, sa classe de conjugaison $O_A = \{PAP^{-1} : P \in GL_n(\mathbb{C})\}$ est fermée dans $M_n(\mathbb{C})$.