

# SO3, SO4 et quaternions

Nico

Prérequis : Quaternions, engendrement de  $SO_n(\mathbb{R})$ .

Notations :

1.  $SO_n(\mathbb{R})$  le sous-groupe des matrices orthogonales réelles de taille  $n$ , de déterminant 1.
2.  $SU_2(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) : |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}$ .
3.  $\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) : a, b \in \mathbb{C} \right\}$ .  $\mathbb{H}$  étant l'algèbre de dimension 4 sur le corps des réels, ayant pour base  $(\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ , où  $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1$  et  $\mathbf{ijk} = -1$ . Il s'agit du corps des quaternions, c'est un corps non commutatif.
4. Si  $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ , et si l'on note  $a = x + iy$ ,  $b = z + it$ , un élément de  $\mathbb{H}$  s'écrit  $h = x\mathbf{1} + y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + t\mathbf{k} = \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}$ .
5.  $\bar{h} = x\mathbf{1} - y\mathbf{i} - z\mathbf{j} - t\mathbf{k}$  le conjugué de  $h$ .
6.  $N(h) = \det h = |a|^2 + |b|^2 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = h\bar{h}$  <sup>(1)</sup>.
7.  $\mathbb{I} = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ .

On propose de démontrer l'existence de 2 isomorphismes :

Il existe deux isomorphismes de groupes :

1.  $SU_2(\mathbb{C})/\{\pm I_2\} \simeq SO_3(\mathbb{R})$ .
2.  $SU_2(\mathbb{C}) \times SU_2(\mathbb{C})/\{(I_2, I_2), (-I_2, -I_2)\} \simeq SO_4(\mathbb{R})$ .

Montrons le premier isomorphisme :

*Démonstration.*  $SU_2(\mathbb{C})$  est un groupe multiplicatif. On le fait agir par conjugaison

---

(1). au sens d'un produit scalaire

sur  $\mathbb{H}$ . On considère le morphisme de groupe  $\varphi$  tel que :

$$\varphi : \begin{cases} SU_2(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathfrak{S}(\mathbb{H}) \\ h & \longmapsto & \varphi_h : \begin{cases} \mathbb{H} & \rightarrow & \mathbb{H} \\ u & \mapsto & huh^{-1} \end{cases} \end{cases}$$

On a que :

1.  $\mathbb{H}$  peut être muni du produit scalaire pour tout  $h, h' \in \mathbb{H} : \langle h, h' \rangle = \frac{1}{2}(h\overline{h'} + h'\overline{h})$ , auquel on lui associe la norme  $N$ . Une telle norme est multiplicative par la multiplicativité du déterminant.
2. Soit  $h \in SU_2(\mathbb{C})$ ,  $\varphi_h$  est une application orthogonale. En effet : pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}, u, v \in I$ ,  $\varphi_h(u + \lambda v) = h(u + \lambda v)h^{-1} = huh^{-1} + \lambda hvh^{-1}$  car  $\mathbb{R}$  est le centre de  $\mathbb{H}$  <sup>(2)</sup>. De plus, par multiplicativité de  $N$ ,  $N(\varphi_h(u)) = N(h)N(u)N(h^{-1}) = N(u)$ . D'où le résultat souhaité. On peut alors voir  $\varphi$  comme un morphisme à valeurs dans  $O(\mathbb{H})$ ,  $\varphi : SU_2(\mathbb{C}) \rightarrow O(\mathbb{H})$ .
3. Soit  $h \in SU_2(\mathbb{C})$ ,  $I$  est stable par  $\varphi_h$ . Puisque  $\varphi_h \in O(\mathbb{H})$ , il suffit de montrer que  $I^\perp = \mathbb{R}$  est stable par  $\varphi_h$  <sup>(3)</sup>. Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi_h(\lambda \mathbf{1}) = \lambda h h^{-1} = \lambda \mathbf{1}$ . On peut alors considérer  $\varphi$  comme étant l'application qui envoie  $h$  sur la restriction de  $\varphi_h$  à  $I$ . On a alors  $\varphi : SU_2(\mathbb{C}) \rightarrow O(I)$ . Puisque  $O(I) \simeq O_3(\mathbb{R})$ , on peut voir  $\varphi$  comme une application à valeurs dans  $O_3(\mathbb{R})$ ,  $\varphi : SU_2(\mathbb{C}) \rightarrow O_3(\mathbb{R})$ .

Montrons que  $\varphi(SU_2(\mathbb{C})) = SO_3(\mathbb{R})$ . On sait que  $SU_2(\mathbb{C})$  est un homéomorphe à  $\mathbb{S}^3$  <sup>(4)</sup> et que  $\mathbb{S}^3$  est connexe. Prouvons qu'il est connexe par arcs :

**Lemme :**  $\mathbb{S}^3$  est connexe par arcs.

*Démonstration.* Soient  $x, y \in \mathbb{S}^3$  distincts. Construisons un chemin continue reliant les deux points :

1. Si  $x$  et  $y$  ne sont pas antipodaux ( $x \neq -y$ ). On considère la fonction :

$$\gamma : \begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow & \mathbb{S}^3 \\ t & \longmapsto & \frac{(1-t)x + ty}{\|(1-t)x + ty\|} \end{cases}$$

(2).  $\mathbb{R} \subseteq Z(\mathbb{H})$  très clairement, et soit  $u = x + iy + jz + kt \in Z(\mathbb{H})$ , on a que  $iu = ui$ , donc  $ix - y + ijz + ikt = xi - y + jiz + kit$ . D'où  $ijz + ikt = jiz + kit$  et donc  $kz - jt = -kz + jt$ . Donc  $0 = k = t$ . On remarque ensuite que  $y = 0$ . D'où  $u \in \mathbb{R}$ .

(3). Soit  $u \in O(E)$ ,  $F$  sev de  $E$  stable par  $u$ . Soit  $x \in F$ , pour tout  $y \in F^\perp$ ,  $\langle x, u(y) \rangle = \langle u(u^{-1}(x)), u(y) \rangle = \langle u^{-1}(x), y \rangle = 0$  car  $F$  stable par  $u^{-1}$ .

(4). Considérer  $\mathbb{S}^3 \rightarrow SU_2(\mathbb{C})$ ,  $(x, y, z, t) \mapsto \begin{pmatrix} x + iy & -z + it \\ z + it & x - iy \end{pmatrix}$

La fonction est bien définie :  $(1-t)x + ty = 0 \implies (1-t)x = -ty \implies \|(1-t)x\| = \|ty\| \implies t = \frac{1}{2}$  car  $\|x\| = \|y\| = 1$ . Mais si  $t = \frac{1}{2}$ , on a  $x = -y$  ce qui sort de l'hypothèse  $x$  et  $y$  non antipodaux. De plus, il est clair que pour tout  $t$ ,  $\|\gamma(t)\| = 1$  d'où est à valeurs dans  $\mathbb{S}^3$ . Par ailleurs,  $\gamma(0) = x$ ,  $\gamma(1) = y$  et  $\gamma$  est continue.

2. Si  $x = -y$ , on considère un point  $z$  intermédiaire et on relie  $x$  à  $z$ , puis  $z$  à  $y$ . □

L'application  $\varphi$  est continue par continuité de l'addition, multiplication et de l'inverse. De plus,  $\det : O_3(\mathbb{R}) \rightarrow \{-1, 1\}$  est continue. Donc  $\det \circ \varphi : SU_2(\mathbb{C}) \rightarrow \{-1, 1\}$  est continue par composition de fonctions continues.  $SU_2(\mathbb{C})$  étant connexe,  $\det \circ \varphi(SU_2(\mathbb{C}))$  est connexe. Mais  $\{-1, 1\}$  n'est pas connexe. Donc  $\det \circ \varphi$  est constante. Or  $\det(\varphi(I_3)) = \det(I_3) = 1$ . D'où  $\det \circ \varphi$  est la fonction constante égale à 1. D'où  $\varphi(SU_2(\mathbb{C})) \subseteq SO_3(\mathbb{R})$ .

Il reste à montrer l'inclusion réciproque, ie que  $\varphi : SU_2(\mathbb{C}) \rightarrow SO_3(\mathbb{R})$  est surjective. Pour cela, puisque  $SO_3(\mathbb{R})$  est engendré par les retournements, il suffit de montrer que tout retournement admet un antécédent pour  $\varphi$ . Soit  $D$  une droite vectorielle de  $\mathbb{R}^3$  et  $s_v$  la symétrie orthogonale par rapport à  $D$ . soit  $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$  un vecteur directeur unitaire de  $D$ . On identifie  $\mathbb{R}^3$  à  $\mathbb{I}$ , de sorte à avoir que  $v = iv_1 + jv_2 + kv_3$ .  $v$  étant unitaire,  $v \in SU_2(\mathbb{C}) \cap \mathbb{I}$ . Montrons que  $\varphi(v) = s_v$ , ie,  $\varphi_v = s_v$ . Il suffit pour cela de montrer que  $\varphi_v(v) = v$  ( $\varphi$  laisse stable  $D$ ) et  $\varphi_v(u) = -u$  si  $\langle u, v \rangle = 0$  ( $u \in D^\perp$ ).

D'une part,  $\varphi_v(v) = vvv^{-1} = v$ .

D'autre part, si  $\langle u, v \rangle = 0$ , alors  $u\bar{v} = -v\bar{u}$ . Mais  $v \in \mathbb{I}$ , donc  $\bar{v} = -v$ . D'où  $u = v\bar{u}v^{-1}$ . D'où  $\varphi_v(\bar{u}) = u$ . Mais  $u \in \mathbb{I}$ , d'où  $\varphi(u) = -u$ .

Ainsi,  $\varphi(v) = s_v$ . D'où  $\varphi$  est surjective.

Par ailleurs,  $h \in \text{Ker } \varphi \iff \forall u \in \mathbb{I}, h u h^{-1} = u \iff h \in SU_2(\mathbb{C}) \cap \mathbb{I} = \{\pm I_2\}$  car  $h$  commute avec  $\mathbb{I}$  si et seulement si  $h$  est dans le centre de  $\mathbb{H}$ .

Par le premier théorème d'isomorphisme,  $SU_2(\mathbb{C})/(\pm I_2) \simeq SO_3(\mathbb{R})$ . □

Montrons le second :

*Démonstration.* Idée de départ :  $SU_2(\mathbb{C})$  est trop petit car un retournement en dimension 4 est par rapport à un plan, qui a deux vecteurs directeurs : On considère  $SU_2(\mathbb{C}) \times SU_2(\mathbb{C})$ .

Faisons agir  $SU_2(\mathbb{C}) \times SU_2(\mathbb{C})$  sur  $\mathbb{H}$  :

$$\rho : \begin{cases} SU_2(\mathbb{C}) \times SU_2(\mathbb{C}) & \longrightarrow \mathfrak{S}(\mathbb{H}) \\ (u, v) & \longmapsto \rho_{u,v} : \begin{cases} \mathbb{H} & \rightarrow \mathbb{H} \\ h & \mapsto uhv^{-1} \end{cases} \end{cases}$$

Il s'agit bien d'une action de groupe :  $\rho_{I_2, I_2} = \text{Id}_{\mathbb{H}}$  et  $(u, v) \cdot ((u', v') \cdot h) = (u, v) \cdot (u'hv'^{-1}) = uu'h(vv')^{-1} = (uu', vv') \cdot h$ .

Comme précédemment, pour tout  $u, v \in SU_2(\mathbb{C})$ ,  $\rho_{u,v} \in O(\mathbb{H})$  et on identifie alors  $O(\mathbb{H})$  à  $O_4(\mathbb{R})$ , de sorte que l'on puisse considérer  $\rho : SU_2(\mathbb{C}) \times SU_2(\mathbb{C}) \rightarrow O_4(\mathbb{R})$ . Puisque  $\rho$  est continue,  $\det : O_4(\mathbb{R}) \rightarrow \{-1, 1\}$  est continue,  $\det \circ \rho : SU_2(\mathbb{C}) \times SU_2(\mathbb{C}) \rightarrow \{-1, 1\}$  est continue. Or  $SU_2(\mathbb{C}) \times SU_2(\mathbb{C})$  est connexe comme produit cartésien de connexes, donc  $\det \circ \rho(SU_2(\mathbb{C}) \times SU_2(\mathbb{C}))$  est connexe et donc  $\det \circ \rho$  est constante égale à 1 car  $\{-1, 1\}$  n'est pas connexe, et  $\det(\rho(I_2, I_2)) = \det I_4 = 1$ . D'où  $\rho(SU_2(\mathbb{C}) \times SU_2(\mathbb{C})) \subseteq SO_4(\mathbb{R})$ .

Montrons que  $\rho : SU_2(\mathbb{C}) \times SU_2(\mathbb{C}) \rightarrow SO_4(\mathbb{R})$  est surjective. Montrons que tout retournement de  $SO_4(\mathbb{R})$  admet un antécédent pour  $\rho$ .

Soit  $\mathcal{P}$  un plan vectoriel de  $\mathbb{R}^4$  engendré par les vecteurs unitaires  $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$  et  $v = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ . On identifie les vecteurs à  $\mathbb{H}$ , de sorte que  $u = u_1 + iu_2 + ju_3 + ku_4$  et  $v = v_1 + iv_2 + jv_3 + kv_4$ . Puisque  $u, v$  sont unitaires,  $u, v \in SU_2(\mathbb{C})$ . Soit alors  $s_{u,v}$  la symétrie orthogonale par rapport à  $\mathcal{P}$ . Stratégie : on cherche deux vecteurs  $u', v'$  tels que  $\rho(u', v')(u) = u$ ,  $\rho(u', v')(v) = v$ , et si  $h \in \mathcal{P}^\perp$ ,  $\rho(u', v')(h) = -h$ .

On a que  $\overline{u^{-1}v} = \overline{vu^{-1}} \stackrel{(5)}{=} \overline{vu}N(u^{-1}) = \overline{vu} = -\overline{uv} \stackrel{(6)}{=} -u^{-1}v$ .

D'où  $w := u^{-1}v \in \mathbb{I}$ .

Par ce qu'on a fait en 1) : le retournement associé à  $w$  est  $\varphi_w : h \mapsto whw^{-1}$ . Donc  $\rho_{w,w}$  est un retournement, et donc  $\rho_{u,1}\rho_{w,w}\rho_{u^{-1},1} = \rho_{uwu^{-1},w}$ , qui est dans la même classe de conjugaison, est aussi un retournement. On vérifie qu'il s'agit de  $s_{u,v}$  :  $\rho_{uwu^{-1},w}(u) = uwu^{-1}uw^{-1} = u$ ,  $\rho_{uwu^{-1},w}(v) = uu^{-1}vu^{-1}vv^{-1}u = v$ . Il s'agit d'un retournement qui fixe  $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$  c'est  $s_{u,v}$ .

Déterminons le noyau de  $\rho$  :

$$\rho(u, v) = 0 \iff \forall h \in \mathbb{H}, uhv^{-1} = h$$

Pour  $h = v$ , il vient que  $u = v$ . Et donc comme pour 1), il vient que  $\text{Ker } \rho = \{(-I_2, -I_2), (I_2, I_2)\}$ . D'où par le premier théorème d'isomorphisme :

$$SU_2(\mathbb{C}) \times SU_2(\mathbb{C}) / \{(-I_2, -I_2), (I_2, I_2)\} \simeq SO_4(\mathbb{R})$$

---

(5). découle du fait que  $M \mapsto M^*$  est un anti-morphisme dans  $GL_n(\mathbb{C})$  :  $(MN)^* = N^*M^*$ .

(6). par définition de notre produit scalaire

□

**Question 1.** Justifier que le centre de  $\mathbb{H}$  est  $\mathbb{R}$ . Justifier que  $\mathbb{H}$  est un corps non commutatif. Justifier que l'on peut munir  $\mathbb{H}$  d'un produit scalaire et d'une norme.

**Question 2.** Soit  $h \in SU_2(\mathbb{C})$ . Exprimer son inverse.

**Question 3.** Justifier que  $SO_n(\mathbb{R})$  est engendré par les retournements.

**Question 4.** Montrer que toute matrice dans la classe de conjugaison d'un retournement, est un retournement.

## Référence

CALDERO, Philippe et Jérôme GERMONI (2017). *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries, tome second*. Calvage & Mounet.

ISENMANN, Lucas (2024). *l'oral à l'agrégation de mathématiques*. 2ème édition. ellipses.

## Recasages

Leçon 101 : Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

Leçon 103 : Conjugaison dans un groupe. Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.

Leçon 106 : Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie  $E$ , sous-groupes de  $GL(E)$ . Applications.

Leçon 108 : Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

Leçon 158 : Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).

Leçon 191 : Exemples d'utilisation de techniques d'algèbre en géométrie.

Leçon 204 : Connexité. Exemples d'applications.