

245 - Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de CC. Exemples et applications.

➤ Références	[Pabion], [QueQue]
📁 Section	Analyse
📅 Date	@27 novembre 2024
☰ Statut leçon	Plan détaillé ok
☰ Enseignant	Bachir Bekka
➤ Développements choisis	Formule des compléments, Indécomposabilité de la loi de poisson
🔍 Nb choisis	2

Rapport de Jury

Introduction

Généralisation des fonctions réelles sur C: se pose alors les questions de dérivabilités, d'être développable en séries entières ?
 Nous donne des outils: ex calcul d'intégrales

Plans

▼ Plan

- Omega un ouvert de C
 - I. Régularité
 1. C dérivabilité et fct holo
 2. Séries entières et fct analytique
 - II. Intégration sur un chemin
 1. Chemins..
 2. Primitive
 3. Notion d'indice
 - III. Formule de Cauchy et conséquences
 1. Formule de Cauchy
 2. Analyticité
 3. Principe des zéros isolés
 4. Principe du maximum
 - IV. Singularité, m romorphie et r siduals
 1. Singularité
 2. R siduals et applications au calcul d'intégral
- annexe: fct classique DSE et rayon de convergence

Théorème d'holomorphie sous l'intégrale ?

▼ Plan détaillé

- ▼ I.1. C dérivabilité et fct holo
 - Pabion
 - C dérivabilité
 - definition holomorphe (en un point/sur un ouvert) + notation H + fct entieres + ex z^2 contre ex Zbarre, Re(f), Im(f)
 - prop: dérivable \Rightarrow continue, H stable somme produit fractions
 - autre point de vue: voit f comme fonction f_R de \mathbb{R}^2 + équivalence dérivable en a et différentielle de fct de \mathbb{R}^2 est C linéaire + ex ?
 - Cauchy Riemann: f fct holo ssi f_R diff et vérifie équations de Cauchy Riemann + ex
- ▼ I. 2. Séries entieres et fonctions analytiques
 - Pabion
 - def série entiere /rayon convergence + prop dérivation
 - def fct analytique
 - prop: tout fct analytique est holomorphe de dérivée
 - ex: polynome et exponentielle
 - rq d'autres en annexes
- ▼ II. 1. Chemins
 - def arc paramétré / chemins + $\gamma(c,R)$ paramétrisation cercle sens direct qui servira tout au long du plan (1 tour)
 - longueur définition avec l'intégrale + ex
 - intégration le long d'un chemin: définition + ex et remarque généralisation intégrale des fonctions complexes à variables réelles
 - rq: vérifient des prop similaire que intégrale classique dont C linéarité et relation de chasles
 - inégalité avec la longueur et le sup (avec Im à la place de supp)
 - passage à la limite CVU + csq analyticité de l'int prop 2 chap 4

- (+ ex selon longueur leçon)

▼ II. 2. Primitives

- def/ prop: définition primitive
- $\int f(z) = F(z_1) - F(z_2) \Rightarrow$ csq: intégrale sur contour fermé est nulle
- prop : dans le cadre d'un ouvert étoilé : f admet primitive ssi intégrale de f sur un contour fermé est nulle ssi intégrale de f sur tout triangle est nulle
- théorème de Goursat : si f holo alors intégrale de f sur triangle nulle (donc admet des primitives)
- csq/lemme : si g fonction holomorphe qui ne s'annule pas alors il existe h holomorphe tq $g = \exp(h)$

▼ II. 3. Notion d'indice (ou avec chemins en petit 1)

- définition indice
- propriétés : zéro à l'infini, constant sur un contour,...
- en annexe signification de l'indice avec chemin qui passe en plus ou moins

▼ III. 1 Formule de Cauchy

- formule de Cauchy sur un ouvert étoilé
- ex 4.2 chap 6 : calcul pratique d'intégrale

▼ III.2. Analyticité

- toute fonction holomorphe dans un ouvert est analytique (en particulier dérivée encore holomorphe)
- (th de Morera (réciproque de Goursat) et th d'holomorphic sous l'intégrale)
- inégalité de Cauchy
- théorème de Liouville
- app : the de D'Alembert Gauss

▼ III.3. Principe des zéros isolés

- définition zéros isolés
- principe des zéros isolés (ou prolongement analytique faible)
- app : calcul de la fonction caractéristique d'une gaussienne
- prolongement analytique fort : si point d'accumulation...
- DEV1 : indécomposabilité + lemme inégalité d'hadamard ?

▼ III.4 Principe du maximum

- théo : principe du maximum
- app : théorème des trois droites

▼ IV.1. Singularité et méromorphie

- définition des différentes singularité + ex
- def méromorphe
- quotient de deux holomorphes ??

▼ IV.2 Théorème des résidus et application au calcul d'intégral

- théorème des résidus
- ex ludique
- app : DEV2 : formule des compléments

- P est une partie entière d'une fonction holomorphe nulle
- à garder en tête : détermination du logarithme
- série de Laurent ?