

250 - Transformation de Fourier. Applications.

➤ Références	[Amrani_Fourier], [MODE_Proba]
⊙ Section	Analyse
📅 Date	@9 octobre 2024
☰ Statut leçon	Plan détaillé ok
☰ Enseignant	Bachir Bekka
➤ Développements choisis	Formule sommatoire de Poisson + Shannon, Théorème de Lévy + TCL
🔍 Nb choisis	2
➤ Développements	Théorème de Lévy + TCL, Formule sommatoire de Poisson + Shannon

Rapport de Jury

- 3 niveaux: L1, Schwartz, L2
- rappeler lien produit de convolution
- formule sommatoire de poisson et app
- résolution EDP
- proba bien

Introduction

- résoudre des EDP → EDO
- importance de la fonction caractéristique en proba

Plans

▼ Plan

- I. Transformée de Fourier de fonctions intégrables
 1. Définition
 2. Propriétés de l'opérateur de transformée de Fourier sur L1
- II. Dans L2 et S
 1. Schwartz+ traitement signal
 2. L2
- III. Applications en proba
 - 1.
 - 2.

Annexe: tableau récap des propriétés de la transformée de Fourier

▼ Plan détaillé

- ▼ I.1. Définition
 - Amrani
 - def + exs comme indicatrice
 - Riemann Lebesgue + grand F qui à f associe f^ est linéaire continue de norme 1
- ▼ I. 2. Propriété de l'opérateur de transformée de Fourier sur L1
 - Amrani
 - prop: symétrie, conjugaison, décalage + formule de dualité (chapeau où on veut) + exs
 - Régularité: dérivation + ex calcul de la gaussienne
 - Convolution: def + si f,g dans L1 alors f*g dans L1 ds def + F(f*g)=F(f)F(g) + formule dans l'autre sens + pas de neutre pour la convolution dans L1
 - cf annexe bilan des props
 - Formule d'inversion dans L1 (quand f^ dans L1) + **ex équ diff (Laplace) dans Amrani**+ coro c'est pas injective + pas surjective, wtf ? (demo Karine normalement) + contre ex ⇒ classe de Schwarz
- ▼ II. 1. Dans Schwartz
 - Amrani
 - def classe de Schwartz + def equi Karine N(phi) + ex
 - stable par dérivation, multiplication par fonction Cinfini dont toutes dérivées à croissance polynomiale
 - Ccinfini inclu S(R) inclu Lq pour tout q + densité dans L2 et dans autre chose pour Lévy ?

- stable par transformée de Fourier
- transformée de Fourier iso de la classe de Schwarz et formule inversion
- planche-r-aile Parseval égalité des normes à racine(2pi) près
- formule de Poisson et Shannon: attention se renseigner isométrie dans L2 tousatousa + remarque sur la pratique du bordel

▼ II. 2. Transformée de Fourier de fonctions de carré intégrable

→ Amrani

- Plancherel Parseval dans L2 maintenant
- Principe d'incertitude de Heisenberg (réf ? Td bolley ?)
- application $1/\sqrt{2\pi}$ F se prolonge de manière unique par théo prolongement application uniformément continue
- rq formules vues précédemment encore vraie dualité, autres ?
- formule d'inversion L2 (que théorique, pas d'intégrale, sait plus à quoi elle ressemble)

▼ III. Définition et premiers exemples

→ Proba stats pour modé

- définition de fonction caractéristique
- ex binomiale et poisson
- rq si X densité c'est fchapeau check + fct caractéristique gaussienne avec exemple avant
- (rq phi continue d'après avant ?)
- si indep alors phi somme = produit des phi

▼ III.2. Importance de la fonction caractéristique

→ Proba stats pour modé

° Caractérisation des lois

- (inversion) + truc d'avant caractérise la loi (inversion de Fourier) + app la somme de deux gaussiennes

° Indépendance

- couple indépendant ssi fct caract du couple est le produits avec s et t

° Calcul des moments

- si moment ordre k, phi dérivée k fois en 0 = $i^k E(X^k)$

° Comme caractérisation de la convergence en loi

- def convergence en loi
- caractérisation avec fonction caractéristique: Lévy dev 2
- TCL

<petit exo

- app: sinc n'est pas dans L1

<a ajouter si devient fort

- principe d'incertitude de Heisenberg