243 - Séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

➤ Références	[Amrani_suites], [FGN-6], [GOU_ANA]
📁 Section	Analyse
📅 Date	@2 avril 2025
☰ Statut leçon	Plan détaillé ok REF !
☰ Enseignant	Vincent Duchêne
➤ Développements choisis	Indécomposabilité de la loi de poisson, Nbr de Bell
🔍 Nb choisis	2
➤ Développements	Indécomposabilité de la loi de poisson, Nbr de Bell

Rapport de Jury

Cette leçon ne doit pas être un catalogue de définitions, règles et propriétés accompagnées de quelques exemples triviaux. Le problème du domaine et les modes de convergence doivent être abordés.

Les liens entre l'holomorphie et l'analyticité doivent être maîtrisés. L'existence de nombreux développements en série entière peut être établie de manière immédiate par cet argument, avec en prime une information sur le rayon de convergence, voire sur l'ordre de grandeur des coefficients.

Le théorème radial (ou non-tangentiel) d'Abel est souvent proposé comme développement, en pensant qu'il s'agit d'un théorème de prolongement, alors qu'il s'agit d'un résultat de continuité. En réalité, ce théorème débouche naturellement sur la question plus générale des procédés de sommation des séries divergentes.

Les séries entières ont également des applications combinatoires pouvant donner lieu à des études asymptotiques très intéressantes. Les fonctions génératrices des variables aléatoires à valeurs entières ont également toute leur place dans cette leçon.

Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser aux théorèmes taubériens relatifs aux séries entières, au problème du prolongement analytique de la somme d'une série entière, aux séries entières aléatoires ou encore aux fonctions C8 nulle part analytiques.

Introduction

- type particulier de séries de fonctions
- bcp de fct usuelles DSE
- particulièrement utile en proba et dénombrement

- I. En temps qu'objet mathématique
- II. Fonctions définies par la sommes
- III. Fcts où regarde si peut s'écrire comme sommes

Faire différence objet math, étude de la fonction définie par la série entière et quand prends une fonction et voit si elle est DSE

Attention complexe/réelle: dit que grande partie de ce qu'on dit peut se limiter sur $\mathbb{R}$

Fais le choix de faire sur $\mathbb{R}$ puis sur $\mathbb{C}$ même si répétitions, mais pour distinguer prépa/pas prépa $\Rightarrow$ choix pédagogique

Plans

▼ Plan

- I. Objet algébrique
 1. Convergences
 2. Méthode de détermination du rayon
 3. Opération sur les séries
- II. Régularité de la fonction définie par la somme
 - Continuité
 - Sur $\mathbb{R}$

▼ Plan détaillé

- def série entières
- ▼ I.1. Convergences
 - lemme d'Abel
 - def rayon CV comme le sup des r tq $\sum a_n r^n$ + ex: fonction theta de Jacobi, rayon =1 (juste besoin def rayon et et lemme Abel) + prop: CV +CVA quand $|z| < R$ et DV quand $> R$ + def: disque de CV
 - ex: fonction theta de Jacobi, rayon =1 (juste besoin def rayon et et lemme Abel)
 - rq: ne sait pas ce qu'il se passe pour $|z|=R$

Sur C

III. Développement en série entières

1. DSE sur R

2. Analyticité

IV. Fonction génératrice

1. Définition et premières prop

2. Fct géné et indépendance

3. Fct géné et CV en loi

Annexe: DSE usuels

- ex: ?
- (rappel CVN et CVU) + série de fonctions CVU et CVN sur $D(0,r)$ pour $0 < r < R$

▼ I.2. Méthodes de détermination du rayon

- règle de d'Alembert + ex somme des $z^n/n!$ (dire que exponentielle, Taylor RI ? ou attends partie DSE?)
- règle d'Hadamard + ex ??
- obtention du rayon par comparaison

▼ I.3. Opérations sur les séries

- sommes
- app: unicité coefficient
- produit
- app: dnbrmt avec Produit (pemrutations...)

Sur le disque de CV: la fonction est donc bien définie

▼ II. Régularité

- continuité R et C
- ° Etude sur R:
 - intégration et expression primitives + app: ln primitive de $1/(1+x)$
 - dérivation/Cinfini et expressions dérivées + app: nbr de Bell DEV 1
- ° Etude sur C
 - def holomorphe
 - somme d'une série entière est holomorphe et expression dérivées
 - app: expression des coefficients
 - ex ??

- def développable en série entière autour d'un point

▼ III.1. DSE sur R

- critère de DSE
- Taylor
- c-ex de Cinfini implique pas DSE
- ° EDO
 - une EDO où trouve une solution particulière DSE
 - un ex où trouve DSE d'une fonction en résolvant équ diff

▼ III.2. Analyticité

- rq: si holomorphe $\Rightarrow$ Existence DSE en tout point
- analyticité: app, X va, est caractérisée par ses moments ssi fct caractéristique est analytique
- lemme Hadamard

même plan que dans va discrètes (sûrement à élager)

▼ IV.1. Définition et premières prop

- définition de la fonction génératrice + ex simple: surtout la poisson
- quelques props: rayon CV au moins 1 + croissance, CV, Cinfini]-1,1[
- ° Caractérisé la loi
 - $pn = G\text{dérivé}n\text{foisen}0 / n!$ donc caractérise la loi
 - ex

° Liens avec moments

- X moments d'ordre k ssi G_X k fois dérivable en 1- et dans ce cas formule
- ex: variance de Poisson

▼ IV.2. Fct génératrice et indépendance:

- poisson aminci (conditionnement) ?? composée de fct génératrice
- prop: si indépendance alors $G_{X+Y}(t) =$ produits
- ex: somme de poisson c'est une poisson
- indécomposabilité de la loi de Poisson DEV 2

▼ IV.3. Fct génératrice et CV en loi

- def convergence en loi
- théo: CV en loi ssi fct génératrice CV simplement
- ex: binomiale et loi de poisson + rq: loi de Poisson = "loi des évènements rares"
- ex hypergéométrique (Thomas Courant) convergence vers binomiale à vérifier

- a regarder culture: taubérien faible/fort