241 - Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples

➤ Références	[Amrani_suites], [GOU_ANA]
📁 Section	Analyse
📅 Date	@23 octobre 2024
☰ Statut leçon	Métaplan ok
☰ Enseignant	Guillaume Leloup
➤ Développements choisis	Formule sommatoire de Poisson + Shannon , Weierstrass / Bernstein par les probas
🔍 Nb choisis	2
➤ Autres développements à case comme item	Banach-Steinhaus et app série Fourier
➤ Développements	Formule sommatoire de Poisson + Shannon

Rapport de Jury

- étude mode de convergence: illustrer d'exemples
- fcts spéciales
- champ complexe
- séries entières, fct génératrices, Fourier plutôt ex significative que cours

Introduction

- suites de fonctions, naturel de s'intéresser à la limite
- suites de fonctions, on les manipule quand on cherche à approcher des fonctions, propriétés de la limite
- séries de fonctions: généralisation de ça où des sommes

Plans

▼ Plan

I. Convergence

1. Suites de fonctions
2. Séries de fonctions

II. Propriétés conservées

1. Bornitude / Continuité
2. Dérivation / Intégrabilité

??

IV. Quelques séries particulières

1. Séries entières et holomorphie
2. Séries de Fourier

Annexe: relations entre modes de convergence, graphe des x^n

▼ Plan détaillé

▼ I.1. Suites de fonctions

- def CVS + exemple: ludique
- ex: Lévy CVS des $\phi(X_n)$ alors convergence en loi
- def CVU avec ϵ + def équivalentes
- ex simple CVU $(1-x/n)^n$ Gourdon
- appli: DEV Bernstein et Weierstrass
- prop CVU $\Rightarrow$ CVS

- contre exemple x^n
 - critère de Cauchy uniforme
 - Dini: sur un compact, fn continue qui converge vers f continue et (fn) monotone alors CVU [Gourdon] + ex ??
- ▼ I. 2. Séries de fonctions
- lien somme partielle + CVS + définition reste
 - def CVA + CVA $\Rightarrow$ CVS + contre ex $(-x)^n/n$
 - Attention CVA $\Rightarrow$ CV seulement dans les complets et même ssi complet, Riesz Fishet
 - CVU + ex + CVU $\Rightarrow$ CVS + contre ex ?
 - critère de CVU avec les restes: CVS alors (CVU ssi restes CVU vers 0) + ex
 - CVN
 - CVN $\Rightarrow$ CVA et CVU (Gourdon)
 - app: exponentielle de matrice et contre exemple (Gourdon ?)
- ▼ II. 1.
- fn borné et CVU alors f bornée
 - même chose pour fn continue + c-ex avec uniquement CVS : x^n + application $\exp(-nx)$ Amrani mq CV pas uniformément + Banach Steinhaus
 - I intervalle non vide de $\mathbb{R}$, (fn) continue sur I, série des fn CVU localement (sur tout compact) alors série continue sur I + ex: fonction zeta
 - double limite pour les suites et les séries
- ▼ II. 2.
- dérivation
 - fn dérivables + fn CVS vers f + fn' CVU alors f dérivable et $f' = \lim fn'$
 - théo Ck
 - rq: même théo sommes partielles
 - Quand arrive dans Banach, suffit de vérifier CVS en un seul point + fonction zeta infiniment dérivable
 - holomorphie par passage à la limite
 - intégration
 - fn int et CVU vers f alors f int et $\lim \int fn = \int f$
 - CV Dominée + ex
 - intégration terme à terme: formule interversion intégrale série impropre
- ▼ III.1. Séries entières
- def série entière et rayon de convergence + CV et DV selon module de z
 - critère de d'Alembert + ex ?
 - ce dont on a besoin pour parler des fonctions génératrices (genre dérivation marche bien même rayon CV)
 - ex des fonction génératrice et lien dérivation et espérance
 - Holomorphie
 - notation $H(\omega)$ ou ω ouvert
 - toute fonction holomorphe se développe en série entière + expression des coeffs
 - app ?
- ▼ III.3. Séries de Fourier
- définition coefficient et série
 - CVN de la série de Fourier dans la cas C_0 et C_{1p} et uniforme en t aussi
 - ex calcul grâce série de Fourier $1/n^2$
 - Poisson et Shannon DEV 2

Possibilités:

- Mieux avec formule sommatoire: fonction de Jacobi cf pour Juin

Parle des CV Lp ?

III. Approximations de fonctions par des suites/séries de fonctions

- Weierstrass
- convolution