264 - Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

Section	Analyse
Date	@26 mars 2025
Statut leçon	Métaplan ok REF !
Enseignant	Jürgen Angst
Développements choisis	<u>Indécomposabilité de la loi de poisson, Weierstrass / Bernstein par les probas</u>
Nb choisis	2
Développements	<u>Weierstrass / Bernstein par les probas</u>

Rapport de Jury

- définition et lois usuelles
- liens éventuels
- ex modélisation faisant intervenir
- fcts generatrice
- marche aléatoire sur Z^d
- + loin : chaîne de markov et process de poisson

Introduction

- premières aléatoires qu'on manipule, les va usuelles modélisent phénomènes biens précis
- intérêts particuliers avec les fonctions génératrices
- s'étendent en des processus compliqués: chaîne de Markov (espaces d'état dnrb)

Plans

▼ Plan

- I. Généralités sur les va discrètes
 1. Définitions
 2. Un exemple : va uniforme sur S_n
 3. Moments de va discrètes
 - II. Fonctions génératrices
Cadre: va à valeurs dans N
 1. Définitions, lien avec moments et premières prop
 2. Fonction génératrice et indépendance
 3. Convergence en loi
 - III. Chaîne de Markov
 - 1.
 - 2.
- Annexe : tableau lois discrètes

▼ Plan détaillé

- ▼ I.1. Définitions
 - Définition variable aléatoire discrète
 - Exemples de variables aléatoire non entier (genre des booléens) ou ex S_n même pas des nombres !
 - Exemples ludique
 -
 - ex avec espace d'états non N : multinomiale, hypergéométrique
 - indépendance
 - Borel Cantelli et ap
 - (prop Borel Cantelli)
 - non existence de proba pour nbr premiers
- ▼ I.2. Ex: variable aléatoire uniforme sur S_n
 - ex d'algo (2 premiers seulement) pour générer réalisation d'une va de loi uniforme sur S_n
 - nbr inversion et nbr de cycles
- ▼ I.3. Moments de va discrètes
 - garder va discrètes $\{x_k\}$ avec module
 - Espérance
 - définition: admettre un moment d'ordre 1 + def espérance + ex simple: bernouilli et poisson

- si veut rq sur vecteurs aléatoires et ex de l'espérance de la multinomiale
- c-ex: de pas toujours des moments $P(X=k) = 6/(\pi^2 \times k^2)$
- prop: si à valeurs dans $\mathbb{N}$: $E(X) = \sum P(X \geq n)$
- prop: espérance d'une somme + espérance binomiale
- ex: espérance du sommet de point fixe
- théo transfert + ex Poisson $E((X+1)^n) = E(X^{n+1})$ + app: nbr de Bell version Romaric + ex Weierstrass ?
- prop: espérance d'un produit indépendant = produit des espérance + app: Khintchine (rademacher)
- LGN (vision approche espérance, ATTENTION utilise tchebychev pour faible L2)

◦ Variance

- définition + ex ludique
- expression somme des variances
- ex variance nbr pt fixe est 1
- var somme est la sommes des var quand indépendance
- c-ex précédent
- ex: binomiale + DEV 1 Weierstrass

▼ II. 1. Définition et premières prop

- définition de la fonction génératrice + ex simple: surtout la poisson
- quelques props: rayon CV au moins 1 + croissance, CV, Cinfini $]-1,1[$

◦ Caractérise la loi

- $p_n = G^{(n)}(0) / n!$ donc caractérise la loi
- ex

◦ Liens avec moments

- X moments d'ordre k ssi G_X k fois dérivable en 1- et dans ce cas formule
- ex: variance de Poisson

▼ II.2. Fct génératrice et indépendance:

- poisson aminci (conditionnement) ?? composée de fct génératrice
- prop: si indépendance alors $G_{X+Y}(t) = \text{produits}$
- ex: somme de poisson c'est une poisson
- indécomposabilité de la loi de Poisson DEV 2

▼ II.3. Fct génératrice et CV en loi

- def convergence en loi
- théo: CV en loi ssi fct génératrice CV simplement
- ex: binomiale et loi de poisson + rq: loi de Poisson = "loi des événements rares"
- ex hypergéométrique (Thomas Courant) convergence vers binomiale à vérifier

▼ III.1. Définition

- définition chaîne de Markov + si espace d'états fini: matrice de transition + rq: infini / graphe
- ex chaîne à 2 états
- caractérisation U_{n+1}

- ex: ex marche aléatoire sur Z
- Chapman Kolmogorov
- ▼ III.2. Classification des états
 - i et j communiquent
 - irréductible: ex Z et marche à 2 états
 - transitoire, récurrent, absorbant
 - ex matrice au pif (ex 3 p 119 MODE) + schema
 - ex marche aléatoire récurrence de O selon paramètre
 - relation d'équivalence, prop de classe
- ▼ III.3. Convergence: espace d'états finis
 - def apériodique
 - Perron Frobenius + faire lien avec matrice de transition d'une chaîne irréductible apériodique
 - fini + apériodique + irred: unique proba invariante et cv qqsoit loi initiale
 - ex marche à 2 états et expression proba invariante

dire à l'oral : on se concentre sur les outils spécifiques aux va discrètes mais n'oublions pas les outils généraux qui marchent également : TCL,...

test du chi-deux