

# 235 - Problèmes d'interversion de symboles en analyse.

➤ Références	[PGCD], [40dev-ANA], [GOU_ANA], [Zully_queff], [Candelpergher], [MODE_Proba]
📁 Section	Analyse
📅 Date	@19 mars 2025
☰ Statut leçon	Plan détaillé ok REF !
☰ Enseignant	Vincent Duchêne
➤ Développement choisis	<u>Théorème de Lévy + TCL</u> , <u>Formule sommatoire de Poisson + Shannon</u>
🔍 Nb choisis	2
➤ Autres développements à case comme item	<u>Banach-Steinhaus et app série Fourier</u> , <u>Méthode de Laplace</u> , <u>Projection sur un convexe fermé</u> , <u>Nbr de Bell</u>
➤ Développements	<u>Théorème de Lévy + TCL</u>

## Rapport de Jury

### Introduction

- ex concret: fct en escalier, tend vers diagonale, longueur =2 alors que longueur limite = sqrt(2) donc limite de la longueur pas longueur de la limite
- intervertir pour faciliter les calculs ou pour passer de conclusion locale à globale
- dire à l'oral pourquoi dans cet ordre: CVM, Fatou..

### Plans

#### ▼ Plan

- I. Grâce à la convergence uniforme
  1. Limites/continuité
  2. Dérivation/intégration
- II. Grâce à des hypothèses de domination
  1. Jusqu'au théorème de CVD
  2. Intégrales à paramètres
- III. Interversion d'intégrales
  1. Fubini Tonelli
  2. Fubini Lebesgue
- IV. Interversion de quantificateurs
  1. Compacité
  2. Interversion de "presque partout"
  3. Baire

#### ▼ Plan détaillé

##### ▼ I.1. Limites/continuité

- lim/lim pour suite et série fonctions
- contre ex:  $x \rightarrow x^n$  sur  $[0,1]$
- ex: où montre une non CVU
- application?

##### ▼ I. 2. Dérivations/intégration

- dérivation: limite simple est de classe  $C_k$  et dérivé + appli: théo classe  $C_k$  sous la somme
- ex: celui du début du DEV Poisson

- ex Cinfini: zeta Riemann ??
  - si série CVU et intégrabilité: intégrable sur segment
  - DEV 1: Formule sommatoire de Poisson et Shannon
- ▼ II. 1. Jusqu'au TCVD
- théo de CV Monotone
  - ex: espérance conditionnelle détaillée + app: espérance conditionnelle
  - théo de Fatou
  - app: (complétude de petit I ? cf Karine)
  - Théo de CVD
  - isoler exemple présent dans méthode de la place (si f bornée sur  $[0, \alpha]$  alors bam CV + app: "méthode de Laplace" ou ) l'oral
- ▼ II. 2. Intégrales à paramètres
- théo de classe  $C_k$  sous l'intégrale (inclus continuité et dérivation)
  - ex fct Gamma
  - ex: calcul intégrale de Gauss
  - interversion série et intégrale impropre si somme  $\int |f_n| CV$
- ▼ III.1. Fubini Tonelli
- Théorème
  - calcul de l'intégrale de Gauss
  - pour  $\nu$  positive, expression de Espérance comme intégrale de la fct de survie
  - deux  $\nu$  à densité: proba qu'elles soient égales est nulle + statistiques d'ordre: sigma def comme ça suit loi uniforme
  - (si indep produit des espérances)
- ▼ III.2. Fubini Lebesgue
- théo Fubini Lebesgue
  - rq: utilise Fubini Tonelli pour utiliser en pratique Fubini Lebesgue
  - Lévy + TCL DEV 2 (utilise Fubini et CVD)
  - nbr de Bell (interversio de deux sommes)
- ▼ IV.1. Compacité
- Heine: intervertit quantificateur (uniforme) continuité
- ▼ IV.2. Interversio de "presque partout"
- Proba
    - ex définition équivalente CV ps
    - + app de Borel Cantelli du DEVS
  - - Riesz-Fisher
- ▼ IV.3. Baire
- Banach Steinhauss et réécriture avec quantificateurs "d'une estimation ponctuelle → réponse globale"
  - applications aux séries de Fourier (utilise aussi un CVD)