181 - Convexité dans $\mathbb{R}^n$. Applications en algèbre et en géométrie.

➤ Références	[Boyer], [NH2G2.T2], [Combes], [Hassan], [Queff_TOPO]
📁 Section	Algèbre
📅 Date	@11 décembre 2024
☰ Statut leçon	Plan détaillé ok
👤 Enseignant	Bachir Bekka
➤ Développements choisis	Isométries du cube et du tétraèdre., Matrice circulante et polygones réguliers
🔍 Nb choisis	2

Rapport de Jury

- convexité d'un point de vue géométrique
- barycentre et coordonnées barycentriques incontournables
- ex géométriques, illustrer figures
- enveloppe convexe et savoir dessiner
- théo gauss lucas polynômes
- points extrémaux
- étude ensemble convexe de matrices: mat sym (def) positive det log convexe
- plus loin: Carathéodory, Hahn Banach, Kran Milman

Introduction

→ notion visuelle que l'on manipule dès notre plus jeune âge à travers notamment les polyèdres

Plans

▼ Plan

- I. Barycentres
 1. Définitions
 2. Coordonnées barycentriques
 - II. Convexité
 1. Partie convexe
 2. Lien avec les fonctions convexes
 3. Points extrémaux
- Annexe: plein de dessin + schema dans un exemple théo gauss lucas

▼ Plan détaillé

- ▼ I.1. Définition
 - Combes
 - def point pondérés
 - def barycentre
 - prop: unique et caractérisation avec vecteurs (2)
 - isobarycentre
 - associativité du barycentre
 - médianes concourantes vers isobarycentre
 - Suite de polygones DEV + dessins en annexe
 - ° affine
 - fonction affine ssi préserve barycentre + app: permute k point alors préserve isobarycentre
 - (espace affine ssi tout barycentre dedans..)
- ▼ I. 2. Coordonnées barycentriques
 - Boyer
 - définition (il y en a une dans Combes, peut être pas la plus générale) mais surtout dans Boyer
 - coordonnées barycentriques de points remarquables du triangle (orthocentre, centre gravité, cercle inscrit et circonscrit) (un peu Boyer et Jerem)
 - d'un point quelconque avec det et Cramer, ref ? (à regarder boyer même truc en dimension n)

- passage coordonnées barycentriques aux coordonnées dans le repère avec matrice, boyer

▼ II. 1. Partie convexe

→ Combes en gros, Hassan à regarder

- def avec segment
- prop: pareil avec barycentre positive
- schema en annexe
- ex applications: Markov en mode matrice: tel truc est convexe et app, **ref ?**
- ° stabilité de la convexité
 - intersection
 - image et image réciproque par application affine
 - intérieur et adhérence sont convexes si C convexe, **ref ? Hassan ?**
- ° topo
 - rq dans un evn: convexe $\Rightarrow$ étoilé $\Rightarrow$ connexe par arcs $\Rightarrow$ connexe ref ? Hassan ?
 - dans evn les boules sont convexes **ref ?**
- ° Enveloppe convexe
 - définition plus petit + intersection + ens des barycentres
 - ex d'enveloppe de convexe: si A déjà convexe, segment, triangle ou polygone plein (Combes), polyèdre ..
 - carathéodory (Boyer)
 - corollaire: en dimension finie A compact, Conv(A) compacte. (Boyer) (contre exemple en dimension infinie Huguet)
 - Gauss Lucas (Boyer)

▼ II. 2. Lien avec les fonctions convexes

→ Deschamps ?

- def fonction convexe
- def épigraphe
- f convexe ssi épigraphe convexe
- un ou deux ex: valeur absolue, exponentielle
- det log concave/convexe? cône des matrices symétriques (def) positives

▼ II.3. Points extrémaux

→ Combes et NH2G2.T2

- définition point extrémal avec segment + prop équivalentes
- ex du segment
- ex matrices de permutations= points extrémaux de l'ens des matrices bi-stochastique (Boyer)
- ex du polyèdre: sommets = points extrémaux
- applications affines préservent points extrémaux
- corollaire: induisent des permutations sur les sommets
- isométries du tétraèdre DEV en insistant plus sur les trucs points extrémaux tout ça tout ça
- isométries du cube + schema annexe

- algo de Graham en info pour tracer enveloppe convexe
- gardé en tête que en général enveloppe convexe d'un compact et pas compact: contre exemples et pleins d'autres trucs pas intuitif cf cours Huguet
- Si vraiment on devient des crack: Hahn Banach et si met Hahn Banach peut mettre enveloppe convexe de O_n est la boule 2 unité
- Helly (illustration de Carathéodory, illustration technique d'algèbre en géométrie)