234 - Fonctions et espaces de fonctions Lebesgue-intégrables.

Références	[Briane&Pagès], [Candelpergher], [Zully_queff]
Section	Analyse
Date	@15 janvier 2025
Statut leçon	Métaplan ok
Enseignant	Isabelle Gruais
Développements choisis	Riesz Fisher, Densité Lp
Nb choisis	2
Développements	Théorème de Lévy + TCL

Rapport de Jury

Introduction

→ On connait déjà l'intégrale de Riemann, on définit une nouvelle intégrale pour définir une notion d'intégrale sur les fonctions non continues par morceaux

Plans

▼ ***Plan***

I. Fonctions Lebesgue intégrable

Cadre: (A,F,μ) un espace complet mesuré et f:A →R mesurable

1. Définition
2. Théorème d'intervertion de symboles

II. Lp

1. Structure générale
2. Cas de L2
3. Dualité (Admis)
4. Densité dans les Lp

III. Transformée de Fourier

1. Sur L1
2. Sur S
3. Sur L2

▼ ***Plan détaillé***

▼ I.1. Définition

- Def intégrable pour indicatrice, fct étagée, positive + intégrable
- ex de preuve (théo de trasnfert ? besoin CVM))
- espace de fct intégrable Lronde_p
- exemple de fct intégrable 1Q, Riemann I lebesgue I

▼ I. 2. Théorème d'intervertion de Symbole

° interversion d'intégrale/somme

- Th de Fubini Tonelli, Fubini Lebesgue + ex Gauss + Espérance c'est l'intégrale de P(X>x)

° limite/intégrale

- CV monotone + c-ex si pas positive (f_n = - indicatrice [n,+infini]
- Fatou+ ex + cex

- CVD + ex

° Interversion dérivée intégrale

- thm dérivation + Ck + app fonction gamma

▼ II. 1. Structure générale

- def Lp relation équivalence
- Hölder + non inclusion + inclusion si mesure finie + Ex L1 inter Linfini ⇒ Lp
- Minkowski + csq Lp EVN
- DEV1 Riesz Fisher
- (Rq l'ens des riemanns integrables n'est pas complet) d'où ça sort ?

▼ II.2. Cas de L2

- L2 est un hilbert + ps
- Def de l'esperance conditionnelle L2
- DEf de l'esperance conditionnelle L1
- base hilbertienne séries de Fourier

▼ II. 3. Dualité

- si 1/p + 1/q =1, si f \in Lq, phi(f): g \in Lp → intégrale de f g est une forme linéaire continue. phi est une isométrie de Lq dans dual de Lp
- si p fini, phi surjective (cas 2 ok Riesz)
- L1 inclus dans Linfini '
- contre ex

▼ II. 4. Densité dans les Lp

DEV QQPART

- Inégalité de Young (ici?)
- f Lp et g C^infini_c⇒ f*g C^infini
- Def suite régularisante + exemple + construction ??
- gn suite régularisante et f Lp alors f*gn CVU vers f
- Cor: le décalage est continue pour f Lp
- Thm C^infini_n dense dans Lp
- Riemann Lebesgue

▼ III. 1 Transformée de Fourier sur L1

▼ III.2. Transformée Fourier sur S

- App THM de Lévy TCL

▼ III.3. Transformée de Fourier sur L2

- Heisenberg, Paley Wiener FAIBLE si veut..

polynômes orthogonaux ?