170 - Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.

↗ Références	[Perrin] , [H2G2.1] , [Griff] , [ROM_AG]
⊙ Section	Algèbre
📅 Date	@18 septembre 2024
☰ Statut leçon	Plan détaillé ok
☰ Enseignant	Françoise Dal'bo
↗ Développements choisis	Loi de réciprocité quadratique , Groupe $O(k,l)$
🔍 Nb choisis	2
↗ Développements	Groupe $O(k,l)$, Loi de réciprocité quadratique

Rapport de Jury

- étude générale des formes quadra indep du corps
- action par congruence, permet dégager invariant, rang déterminant
- nbr et structure orbite
- algo gauss et appli simple
- classification sur R ou C, sur corps finis
- groupe orthogonal, générateur structure groupe quand dim 2
- dualité espace vectoriel, orthogonal est supplémentaire ?
- rattacher géo diff ?

Introduction

→ poly homogène de degré 2 qui apparaissent dans plusieurs domaine: la recherche d'extremas avec la Hessienne ou en physique

Un autre exemple très classique est la forme

$x^2 + y^2 + z^2 - t^2$ sur $\mathbb{R}^4$, qui permet de définir l'espace de Minkowski utilisée en relativité restreinte

→

Plans

▼ Plan

Cadre

I. Formes bilinéaires formes quadratiques

1. Forme bilinéaire
2. Forme quadratique
3. Notion d'isotropie

II. Orthogonalité

fixe q forme quadratique et b forme polaire associée

1. Bases orthogonales et algo de Gauss
2. Sous espaces orthogonaux
3. Groupe orthogonal

III. Classification des formes quadratiques

1. Quelques invariants (H2G2 t 1)
2. Sur C (Griffon)
3. Sur R (Griffon)

▼ Plan détaillé

→ Griffone

▼ I.1. Forme bilinéaire

- def forme bilinéaire
- def matrice d'une forme bilinéaire + def application linéaire associée
- rq j pratique dimension infinie
- def du rang en terme de matrice/j
- def du noyau en terme de matrice/j
- def dégénérée en terme de matrice/j
- ex ? (peut être symétrique)
- prop theoreme du rang bizarre
- def symétrique + prop matrice dans toute base symétrique + ex du produit scalaire euclidien + hessienne

▼ I.2. Forme quadratique

- def forme quadratique avec forme bilinéaire
- prop b unique: appelle forme polaire

4. Sur F_q (Perrin)

Annexe: cône isotrope

- ex Hessienne
- rq homogène degré 2
- on appelle rang, noyau truc pareil de la forme bilinéaire associée
- def définie, définie positive
- définie positive $\Rightarrow$ non dégénérée
- ex global avec forme polaire, matrice, définie positive

- prop: deux matrices représentent la même forme quadratique ssi changement de base

▼ I.3. Notion d'isotropie

- vecteur isotrope
- ex dans l'exemple précédent e_3 isotrope
- forme quadra définies st les formes quadra dt seuls vecteurs isotrop est le vect nul
- cône isotrope
- rq cône et pas sev
- exs + figures en annexe
- prop noyau dans $l(q)$
- rq on a pas l'inclusion dans ex précédent $N(q)=0$
- rq: on peut voir une conique d'un plan affine de $\mathbb{R}^2$ comme l'intersection d'un cône isotrope d'une forme quadratique et d'un plan

On dit que deux vecteurs x et y sont orthogonaux pour q ou pour b si $b(x,y) = 0$.

▼ II. 1. Base orthogonale

- def base orthogonale et orthonormée
- Oral: rq: la recherche de bog revient à chercher une base dans laquelle q est diagonale ou à écrire q sous la forme d'une somme de termes carrés
- théorème existe toujours base orthogonale + somme de carrés et matrice
- méthode de gauss (Attention pas écrit dans Griffone) + appli: obtient forme orthogonale comment ? + ex p 312
- diagonalisation simultanée: avec le produit scalaire et q quelconque (oral: application dans la dernière partie)

▼ II. 2. Sous espaces orthogonaux

- def orthogonal d'une partie
- ex avec la forme quadratique $b(M,N)=\text{Tr}(MN)$ on a orthogonal de S_n c'est A_n
- props toute page
- rq "on a pas toujours la somme directe même quand q est pas générée" (en prenant un vecteur isotrope)

▼ II. 3. Groupe orthogonal

- $\Rightarrow q$ non dégénérée
- def du groupe orthogonal pour une forme quadra non dégénérée
- f dans $O(q)$ ssi forme matricielle
- prop $\det f = \pm 1$
- devl 1: $O(k,l)$ avec une forme quadratique sur $\mathbb{R}$, avec définition de la signature (H_2G_2) (voir ce dont on a besoin pour ça avant, forme polaire ?)

▼ III. 1 Quelques invariants

- def action par congruence + congruents si appartiennent à la même orbite + st congruents si même forme quadra dans deux bases différentes
- discriminant def
- prop: rang et discriminant sont des invariants

▼ III.2. Sur C

- théo
- corollaire Rombaldi

▼ III.3. Sur R

- théo de Sylvester: définition de la signature + dépend que de la forme quadratique, pas de la base
- rq si t'es non dégénéré, $k+l=n$ + définie/positive si a de la place
- ex signature de l'exemple d'avant
- app: lemme de morse
- app étude position relatif d'une surface
- App: comptage des racines d'un polynôme (rg de la signature)

▼ III.4. Sur Fq

- théorème (Perrin ?)
- corollaire Rombaldi
- app: loi de réciprocité quadratique ?? (H2G2.1)

- être conscient que généralisation de la diagonalisation simultanée se généralise à deux formes quadratiques dont une non dégénérée (exo 24 du Griffone) A FAIRE
- $b(X,Y) = tX \text{ Mat } Y$ (Griffone)
- regarder l'exemple de Damien $\text{tr}(M^2)$