229 - Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

Références	[MODE_Proba], [ROM_ANA], [Obj_pas_chômage], [40dev-ANA], [Barbe&Ledoux], [GOU_ANA]
Section	Analyse
Date	@4 février 2025
Statut leçon	Plan détaillé ok
Enseignant	Vincent Duchêne
Développements choisis	Compacité faible et optimisation Hilbert, Hoeffding/Borel-Cantelli/App
Nb choisis	2
Autres développements à case comme item	Méthode de gradient à pas optimal
Développements	Hoeffding/Borel-Cantelli/App

Rapport de Jury

Introduction

→ deux types de fonctions qu'on sait particulièrement étudier: optimisation (extremums au bord/milieu)

→ utile en probas

Plans

▼ ***Plan***

I. Fonctions monotones

1. Définition, régularité et caractérisation
2. Utilisation de la monotonie
3. Un ex: fonction de répartition

II. Fonctions convexes

1. Définition et régularité
2. Caractérisations
3. Inégalités
4. Optimisation

Annexe: dessin gradient

▼ ***Plan détaillé***

▼ I.1. Définition, régularité et caractérisation

- definition

° Régularité

- fonctions monotones a un nombre dnbrable de pt de discontinuité (si besoin théorème de la limite monotone)
- monotone dérivable presque partout (admis)

° Caractérisation

- avec dérivées + c-ex pas équivalence avec x^3 + app Si f est positive, ∫x f est croissante

° autre prop

- si monotone: continue ssi f(I) intervalle

▼ I. 2. Utilisation de la monotonie

- Théorème de la bijection + app nulle
- Comparaison série intégrale + app série de Bertrand / calcul de développement asymptotique
- Suites récurrentes: u_n+1=f(un): si f monotone, conserve ordre des premiers termes et (u2n) et (u2n+1) monotone de monotonie diff

▼ I. 3. Fct de répartition

- def + un exemple
- propriétés
- méthode d'inversion + déduction du retour: si fct qui vérifie ça alors fct répartition
- (caractérisation de la cvg en loi, ou à l'oral)
- 2nd théorème de Dini + glivencko Cantelli

▼ II. 1. Définition et régularité

- def de convexe + strictement convexe + concave dans le cas général sur C convexe d'un EVN + rq sur I intervalle de R
- ex: convexe non strictement Hauchecorne ?? (sinon cf plan Martin)
- lien avec l'épigraphe (dessin annexe)
- la propriété des fonctions convexes avec une combinaison convexe de n points au lieu de 2.
- ex gamma log convexe + autre exemple dans R^n, det strictement log concave sur Sn++ ???

° Régularité

- une fonction convexe est continue à l'intérieur de C
- fonctions convexes a un nombre au plus dénombrable de points de non dérivabilité

▼ II.2. Caractérisations

° Caractérisation pour f:R→R

- convexe ssi en dessous de ses les cordes qui sont au-dessus de la courbe
- ex: convexe + concave ⇒ affine
- inégalité des pentes croissantes (faire un dessin)
- si dérivable: convexe ssi f' croissante (deux fois dérivables ssi f''≥0) + x^alpha sur R+* selon signe de alpha
- convexe ssi au dessus de ses tangentes

° Caractérisation pour f:E→ R

- fct diff: inégalité avec gradient et deux fois différentiables: inégalité avec Hessienne
- ex avec la fonctionnelle 1/2<Ax,x>-<b,x> ? a vérifier ?? (truc utilisé gradient)

▼ II.3 Inégalités

° Générales

- exp

si pas mis avant extension inégalité de deux à n

- sin: celle sur corde et sur tangente + app: norme 1 de Dn tend vers infini (série de Fourier)
- log + app: arithmético-géométrique

° Lp

- young + inégalité de Hölder ; les inclusions des espaces Lp en mesure finie ;
- Minkowski → Lp EVN

° Proba

- jensen + E(X2)>E(X)^2 + E[|X|] > |E[X]| + app: mq martingale de Doob est une martingale (côté L1)
- hoeffding + app cv presque sûre DEV 1

▼ II. 4. Optimisation de fonctions convexes

° Prop sur fct convexes

- si minimum local alors global
- si dérivable/différentiable: si pt critique à l'intérieur alors minimum
- strictement convexe: minimum en au plus un pt
- en dimension finie: continue + coercive + strictement convexe ⇒ admet unique minimum

° Dans Hilbert

- DEV 2: lemme + optimisation dans Hilbert
- app ? si devient fort

° Gradient à pas optimal

- cadre + convergence