162 - Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

➤ Références	[Allaire] , [Griff] , [Obj_pas_chômage] , [40dev-ANA]
📁 Section	Algèbre
📅 Date	@26 novembre 2024
☰ Statut leçon	Plan détaillé ok
👤 Enseignant	Lionel Fourquaux
➤ Développements choisis	Méthode de gradient à pas optimal , Forme normale de Smith (euclidien) .
🔍 Nb choisis	2

Rapport de Jury

- techniques liées simples pivot de gauss, lien avec notion de système échelonné
- contexte algèbre linéaire et dualité
- point de vue opératoire doit accompagner théorique
- intérêt algorithmique
- conséquence théorique: générateur GL_n , relations dépendances linéaire entre colonnes
- dimension de sev
- résolution de systèmes sur $\mathbb{Z}$, Hermite
- décomposition LU, Cholesky et coup méthode
- étudier résolution équation normale pour moindres carrés et décomposition en valeurs singulières

Introduction

Application du pivot de Gauss

- résoudre $AX=b$
- trouver le rang d'une famille de vecteurs
- calculer le déterminant
- calculer l'inverse d'une matrice
- engendrer $GL_n(K)$ par les dilatations et transvections
- engendrer $SL_n(K)$ par les transvections
- savoir si une famille est libre
- savoir si une famille est génératrice
- trouver l'intersection de l'intersection de deux sous-espaces vectoriels

Recherche de valeurs propres

Apli équa diff

Smith, P et Q faciles à inverser

Idee méthode de gradient pas optimal: prendre le plus grand pas possible pour aller plus vite mais tout en garantissant convergence

Plans

▼ Plan

- I. Système d'équation linéaire
 1. Définitions
 2. Méthode de Cramer
 3. Cas des systèmes échelonnés
- II. Pivot de Gauss
 1. Pivot de gauss et application
 2. Analogue dans les anneaux

▼ Plan détaillé

- ▼ I. Systèmes linéaires
 - Griffone p 38
 - définition système d'équation linéaire
 - équivalence matricielle
 - système carré/sur-déterminée/sous-déterminée
 - existence et unicité de solutions: si A inv, existe unique solution sinon si b dans l'image infinié et sinon pas de solution

III. Décomposition pour la résolution

1. LU

2. Cholesky

IV. Méthode itératives

1. Méthodes itératives $M X = N X + b$ ($A = M - N$)

2. Méthode du gradient à pas optimal

Annexe: coordonnées barycentriques, liens opérations élémentaires et matrices

- ex de la regression linéaire (ref ?) + sur-déterminé + incompatible: pas de solutions sauf si sont alignés: pas le cas générique

° Une première méthode

→ Griffone, Allaire,

- méthode de Cramer
- rq utilité en pratique nulle mais application théorique cool
- barycentre (Audin)
- Matrice de Gram

° Cas des systèmes échelonnés

- def système échelonnées (ex et c-ex)
- ex systèmes triangulaire complexité algo remonté/descente
- rq: cherche à échelonner les systèmes

▼ II. 1. Pivot de gauss et applications

→ Griffone ?

- opérations élémentaires: Permutation / Dilatation / Transvection
- Prop : on peut donc ajouter, à une ligne, une combinaison linéaire des autres lignes (ATTENTION QUE SUR LES LIGNES car X à droite) (annexe avec les matrices)
- Prop : ces opérations préservent les solutions du système
- théo/algo Pivot de Gauss: il existe M tqt MA soit échelonnée (triangulaire supérieure pour les carés)
- complexité
- corollaire: GLn engendré par transvections et dilatations et SLn transvections
- applications: AX=b un exemple
- rq: de nombreuses applications: calcul de déterminant / trouver l'intersection de deux sous-espaces vectoriels (Griffone)
- app: Berlekamp recherche du noyau

▼ II.2. Forme normale de Smith

→ Objectif Agreg

Cadre: plus général d'anneau

- théorème
- rq vrai aussi anneau principal mais perd algo
- appli: GLn(A) engendré par les transvections et dilatations dans cadre euclidien
- appli: Frobenius ?? jsp trop en fait
- ex de décomposition et ex de résolution

▼ III.1. Décomposition LU

→ Allaire

- def sous matrices diago
- décomposition LU
- complexité pour obtenir et pour résoudre
- explication résolution AX=B → LY=B et UX=Y
- ex de résolution
- rq permet aussi calcul déterminant

▼ III.2. Cholesky

→ Allaire

- théo
- complexité
- exemple

▼ IV. 1. Méthodes itératives $MX = NX + b$ ($A = M - N$)

→ Allaire

- définition méthode itérative + def convergence + critère de convergence
- ex méthode Jacobi
- ex méthode Gauss Seidel
- ex relaxation

▼ IV.2. Méthode de gradient

→ Allaire/ Bernis et Bernis

- lien avec système (itératif ? moindre carrés)
- Théorème d'équivalence entre $\tilde{X}$ est solution de $AX = b$ SSI $\tilde{X}$ minimise la fonctionnelle convexe
- inégalité Kantorovitch
- méthode du gradient avec vitesse de Convergence

- résoudre système avec Gram-Schmidt
- A regarder: QR → Marche plus que carré/inversible, si veut mettre dans 3