

# 161 - Espaces vectoriels et espaces affines euclidiens: distances et isométries.

➤ Références	[Combes], [NH2G2.T2], [Griff], [Perrin], [Audin], [GOU_AGP]
📁 Section	Algèbre
📅 Date	@13 novembre 2024
☰ Statut leçon	Plan détaillé ok
☰ Enseignant	David Bourqui
➤ Développements choisis	Matrice de Gram + Hadamard, Isométries du cube et du tétraèdre.
🔍 Nb choisis	2
➤ Développements	Isométries du cube et du tétraèdre., Simplicité de $SO_3(\mathbb{R})$

## Rapport de Jury

- bases euclidien et affine connus
- dimension finie
- notion de distance, norme euclidienne, projection euclidienne
- Gram et Hadamard
- classification des isométries 2 et 3, rotation dim 3 et connaître lien réduction
- groupes d'isométries dim 2 et 3
- mq qu'une isométrie est affine et générateurs groupes isométries affines
- groupe similitude
- lien proba, écart type et covariance

## Introduction

- distance: notion qu'on appréhende dans la vie en générale
- formaliser permet de faire de la géométrie en dimension plus grande, (applications aux probas)
- si produit semi-direct: c'est ce qui nous incite à s'intéresser à  $O(E)$

## Plans

### ▼ Plan

**Notation:**  $E$  euclidien, affine, groupe applications affines

I. Distance et matrice de Gram

II. Isométries vectorielles

1. Définition

2. Étude du groupe orthogonal

III. Isométries affines

1. Définition

2. Classifications des isométries

3. Groupe des isométries préservant une partie du plan ou de l'espace

**Annexe:** cf Combes

- schéma distance sous espace, schéma réflexion, retournement, symétrie glissée, vissage symétrie / rotation
- tableau recap classification isométrie plan/espace

### ▼ Plan détaillé

▼ I. Distance et matrice de Gram

- prop: norme sur  $E \rightarrow$  distance sur  $E$  rond
- distance d'un point à un sous-espace
- théorème: distance atteinte et projeté orthogonal + (rq/ garder en tête que se généralise en dimension infinie quand  $F$  est de dimension finie) ref ???
- ex distance d'un point à un plan ?? (ref ? Arthur)

→ Gourdon environ p 260

- matrice de Gram: définition matrice de Gram / déterminant
- prop: une matrice est de Gram ssi symétrique positive
- prop: définie positive (ie  $G$  non nul) ssi famille libre DEV 1
- théorème avec la distance DEV 1
- application Hadamard (ref ??? ) DEV 1
- application calcul d'intégrale exo 6
- Rq: s'intéresse aux applications linéaires/affines qui préservent les distances

- polygone régulier/tétraèdre/cube Combes p 168

#### ▼ II.1. Définition

→ Griffon chap euclidien / combes

- définition d'isométrie vectorielle ( $u$  de  $L(E)$ )
- définition équivalentes ( $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , bon sur bon et matrice orthogonal et note  $M$  dans  $O_n$ )
- ex une symétrie est une isométrie ssi c'est une symétrie orthogonale avec définition symétrie orthogonale
- prop  $\det = \pm 1$  en particulier bijective
- def  $SO(E)$

#### ▼ II. 2. Étude du groupe orthogonal

- def réflexion et renversement avec la dimension du sous espace  $E_-$  (donc mettre décomposition  $E = E_+ \oplus E_-$ )  $E = \ker(u - Id)$  somme directe orth  $\ker(u + Id)$  (cf schema annexe)

→ Perrin / Audin

- $O(E)$  engendré réflexion /  $SO(E)$  engendré renversement + nbr
- centre
- prop: deux sym orthogonale conjuguées ssi même dimension de  $V$
- corollaire: groupes dérivés
- réduction des isométries + condition  $SO$  (Gourdon par ex)
- rq: permet classification des isométries vectorielles du plan et de l'espace (cf Gourdon)
- application connexité/connexe
- $SO_3$  simple

#### ▼ III. 1 Définition

- isométrie affine
- ex: translation, homothétie/rotation
- prop: isométrie  $\Rightarrow$  affine
- prop: isométrie affine ssi partie linéaire isométrie vectorielle
- et donc  $Isom$  sous groupe  $Aut$  + def  $Isom+$
- def déplacement / anti-déplacement
- (conjugaison avec translation ? produit semi-direct de  $Isom$  entre  $E$  et  $O(E)$  ?)

#### ▼ III.2. Classification des isométries

→ Combes

- décomposition canonique
- classification des isométries du plan
- classification des isométries de l'espace
- + cf annexe tableau récap avec points fixes
- 

#### ▼ III.3. Isométries préservant une partie du plan ou de l'espace

→ NH2G2.T2. / Annexe Griffone

- $Is(X)$ ,  $Is+(X)$
- préserve les points extrémaux (+def si la place)
- groupe diédral (dans le plan  $\dim n=2$ ) (Calais)
- isométries du cube et du tétraèdre