228 - Continuité, dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.

➤ Références	[ROM_ANA], [Candelpergher], [GOU_ANA], [MODE_Proba], [Statsaction], [Zully_queff], [Hauchecorne].
📁 Section	Analyse
📅 Date	@3 décembre 2024
☰ Statut leçon	Plan détaillé ok
👤 Enseignant	Bachir Bekka
➤ Développement choisis	<u>Méthode de Laplace</u> , <u>Weierstrass / Bernstein par les probas</u>
🔍 Nb choisis	2
➤ Autres développements à case comme item	<u>Théorème de Lévy + TCL</u> , <u>Théorème d'Ascoli</u>
➤ Développements	<u>Weierstrass / Bernstein par les probas</u> , <u>Banach-Steinhaus et app série Fourier</u> , <u>Théorème d'Ascoli</u>

Rapport de Jury

Au delà des définitions et premiers théorèmes, le programme ore de nombreuses pistes aux candidates et candidats pour élaborer leur plan : recherche d'extrema, utilisations de la continuité uniforme, fonctions convexes et leur régularité, approximation par des fonctions régulières, utilisations des formules de Taylor, liens entre caractère C8 et analyticit, etc.

Des exemples explicites de fonctions continues et nulle part drivables, de fonctions continues et croissantes drive nulle presque partout, de fonctions C8 drives en un point prescrites, etc. sont les bienvenus dans cette leon.

Les candidates et candidats solides peuvent s'intresser la drivabilit des fonctions monotones ou lipschitziennes ou celle de l'intgrale indfinie d'une fonction intgrable, proposer diverses applications du thorme de Baire (continuit d'une limite simple de fonctions continues, points de continuit d'une drive, gnricit des fonctions nulle part drivables parmi les fonctions continues ou des fonctions nulle part analytiques parmi les fonctions C8, etc.)

Introduction

- continuit drivabilit premires proprits qu'on tudie sur les fonctions. Continuit assure que tout se passe bien . Drivs pour quantifier l'accroissement.
- Hypothses necessaires de bcp thoremes

[Moment o si DL ordre 1 alors drivable; c'est cette autre "dfinition" de la drivable qu'on gnralis avec la differentiability]

Plans

▼ Plan

- I. Continuit et drivabilit
 1. Continuit
 2. Drivabilit
 3. Intgrale paramtre / suites/ sries de fonctions
 - II. Thormes fondamentaux
 - III. Applications
 1. Suites dfinies par rcurrence
 2. EDO
 3. Proba/stats
- annexe : tableau des drives usuelles, schma Rolle, schma EAF

▼ Plan dtaill

- ▼ I.1. Continuit
 - dfinition continuit, uniforme continuit, lipschitzienne
 - exemple de fonction continue : valeur absolue, contre-ex : indicatrice de Q (fonction de Dirichlet), fonction monotone nbr dnombrable points de discontinuit
 - continuit squentielle
 - TVI + ex ?
 - continue sur un compact borne et atteinte ses bornes
 - lipschitzienne $\Rightarrow$ uniformment continue $\Rightarrow$ continue + c-ex : $x \rightarrow x^2$
 - thorme de Heine
 - (app : dfinition de l'intgrale de Riemann)
 - thorme de Weierstrass DEV 1
- ▼ I.2. Drivabilit
 - dfinition drivabilit
 - somme produite quotient drivables
 - en annexe : tableau des drives usuelles

- prop : dérivable $\Rightarrow$ continue + c-ex : valeur absolue
 - ex : il existe des fonctions continues mais nulle part dérivable (exo Gourdon) + fonctions convexes a un nombre au plus dénombrable de points de non dérivabilité
 - définition classe C^k sur ouvert et fermé
 - Formule de Leibniz
 - dérivée de f^{-1} + app: arctan
- ▼ I.3. Cas des intégrales à paramètres/suites / séries de fonctions
- limite uniforme d'une suite de fonctionx continues continue
 - théorème de dérivation/ continuités sous l'intégrale/sous le signe somme (attention besoin IAF)
 - ex: Gamma ou un truc du genre
- ▼ II. Théorèmes fondamentaux
- °Rolle
- extrema $\Rightarrow$ points critiques
 - si f convexe, points critiques $\Rightarrow$ extrema
 - Rolle + schéma annexe
 - app : si P scindé alors P' scindé
- °Accroissements finis
- EAF + schéma annexe + IAF
 - csq : monotonie en fonction de la dérivée
 - app : f convexe ssi f' croissante
 - app EAF : théorème de Darboux
 - ex : mq qu'une fonction est lipschitzienne avec sup de la dérivée
- °Taylor
- 3 formules de Taylor ou au choix
 - app : obtention de DL et d'encadrements
 - app : Méthode de Laplace DEV2
- ▼ III.1. Suites définies par récurrence
- Agreg interne cf leçon 226
- définition
 - cas f monotone,
 - cas f continue: si $un \rightarrow l$ alors l point fixe
 - classification des points fixe selon dérivés
- ▼ III.2. EDO
- Cauchy Lipschitz local
 - cas où $C1 \Rightarrow$ local lipschitzienne donc ok
 - rq: si fonction globalement lipschitz alors solution globale
 - théorème d'ascoli
 - péano: si juste continue
 - perd unicité : $\sqrt{\text{abs}(x)}$
- ▼ III.3. Proba/stats
- continuous mapping théorem
 - convergence en loi
 - + Lévy et TCL

- Inégalité de Kolmogorov [FGN 3 P.359]
- delta méthode
- app: intervalle de confiance EMV exponentielle par ex