159 - Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.

Références	[GOU_ANA], [Griff]
Section	Algèbre
Date	@5 février 2025
Statut leçon	Plan détaillé ok REF !
Enseignant	Sébastien Moskowitz
Développements choisis	Théorème des extrema liés , Irred déterminant et hyperplan matrices
Nb choisis	2
Autres développements à case comme item	Irred déterminant et hyperplan matrices
Développements	Théorème des extrema liés

Rapport de Jury

Il est important de bien placer la thématique de la dualité dans cette leçon ; celle-ci permet de mettre en évidence des correspondances entre un morphisme et son morphisme transposé, entre un sous-espace et son orthogonal (canonique), entre les noyaux et les images ou entre les sommes et les intersections.
Bon nombre de résultats d'algèbre linéaire se voient dédoublés par cette correspondance. Les liens entre base duale et fonctions de coordonnées doivent être parfaitement connus. Le passage d'une base à sa base duale ou antéduale, ainsi que les formules de changement de base, doivent être maîtrisés. On pourra s'intéresser aux cas spéciques où l'isomorphisme entre l'espace et son dual est canonique (cas euclidien, cas des matrices).
Savoir calculer la dimension d'une intersection d'hyperplans via la dualité est important dans cette leçon. L'utilisation des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes permet d'obtenir les équations d'un sous-espace vectoriel ou d'exhiber une base d'une intersection d'hyperplans. Le lien avec la résolution des systèmes linéaires doit être fait.
Cette leçon peut être traitée sous différents aspects : géométrique, algébrique, topologique ou analytique. Il faut que les développements proposés soient en lien direct avec la leçon. En rappeler que la différentielle d'une fonction à valeurs réelles est une forme linéaire semble incontournable.
Pour des candidates et candidats ayant une pratique de ces notions, il est possible d'illustrer la leçon avec un point de vue probabiliste, en rappelant que la loi d'un vecteur aléatoire X est déterminée par les lois unidimensionnelles de X u pour tout vecteur u

Introduction

→ formes linéaires, une partie d'application linéaire connue → hyperplans

→ dualité permet un nouveau point de vue et retrouver des résultats que l'on peut démontrer autrement

Pourquoi étudier le dual ? Structure d'un espace vectoriel et son dual sont très liés. De plus, les hyperplans donnent une interprétation géométrique des formes linéaires

Plans

▼ ***Plan***

I. Formes linéaires et hyperplan

1. Formes linéaires
2. Hyperplan

II. Dualité

1. Espace dual
2. Base duale
3. Bidual
4. Transposé

III. Orthogonalité

1. Orthogonalité
2. Transposée

▼ ***Plan détaillé***

▼ I.1. Formes linéaires

- définition de forme linéaire et E*
- ex ludique: formes linéaires coordonnées et ex: application différentiable de Rn → R alors df(a) est une forme linéaire
- prop: noyau si phi non nulle est de dimension n-1
- ex ludique avec forme linéaire coord: Ker phi_i= Vect(e_j; j≠i)

▼ I. 2. Hyperplan

- def Hyperplan comme truc de dim n-1 (supplémentaire est une droite)
- Rq : noyau forme linéaire en est une
- prop: tout hyperplan est noyau d'une forme linéaire non nulle
- ex ludique du passage de la définition d'un hyperplan à quelles est la forme linéaire correspondante

- les endomorphismes stabilisant tous les hyperplans sont les homothéties, app ??
- Proposition : Caractérisation de la proportionnalité de formes linéaires: deux formes linéaires non nulles ont même noyau ssi sont proportionnelles i.e. le noyau détermine la forme linéaire à constante près.
- (lemme: det est irréductible) + app: hyperplan de Mn(K) intersecte GLn DEV1

°Hyperplan et systèmes linéaires

- sev de dimension p est l'intersection de n-p hyperplans → systèmes linéaires pour trouver une base
- Remarque : Résolution de système d'équations, vu comme intersection d'hyperplan de chaque ligne: dimension de l'intersection des hyperplans est n-r où r est le rang de la famille des formes linéaires

▼ II. 1.Espace dual

- def E*,
- rq: dim E*=dim E donc isomoprhes
- rq: l'isomorphisme n'est pas canonique, il dépend des bases choisies
- Cas euclidien: isomorphisme canonique grâce au théorème de Riesz puisqu'à chaque forme linéaire associe un élément
- ici ?? Duale de Mnm(K) ?

▼ II.2. Base duale

- def application coordonnées e_i*
- prop: {ei*} forme une base de E*⇒ base duale
- ex ludique base duale (genre dans R^3)
- exemple dans Rn[X]: base duale de la base canonique ? Polynôme de Lagrange ?

▼ II.3. Bidual

- def bidual
- E et E** sont isomorphe canoniquement (dépend pas des bases)
- soit base de E* {phi_i} alors existe une unique base de E {ei} tq phi_i=e_i* ⇒ base antéduale

▼ II.4. Application transposé

- transposée de u
- prop: même rang
- Cas euclidien: la transposée coïncide avec l'adjoint

▼ III. 1. Orthogonalité

- def x et phi orthogonaux
- ajouter l'exemple de ei et ej∗
- def orthogonal d'une partie de E
- def orthogonal d'une partie de E*
- $\{\phi\}^\circ = \mathrm{Ker}\phi$; quelques propriétés sur la croissance, les vect
- puis $F^{\perp\circ} = F$ et $G^{\circ\perp} = G$; en conséquence $F = E \Leftrightarrow F^{\perp} = \{0\}$
- DEV 2: lemme algébrique + extremas liés + app: Hadamrd ou autre
- en dimension finie ; l'application aux équations des sev ?
- l'ensemble des formes linéaires qui s'annulent sur un hyperplan est une droite de E∗.

- dans un ev euclidien, on a le théorème de représentation de Riesz, et l'orthogonalité au sens des formes
  linéaires coïncide avec l'orthogonalité au sens du produit scalaire.

▼ III.2. Orthogonalité et transposée

- Im(tu)=orth de Ker u
- Ker(tu)=orth de Imu + app: rg(A)=rg(T.A)
- F est u-stable ⇔ F ⊥ est tu-stable
- rq: utile démonstrations par récurrence sur la dimension, comme pour f trigonalisable ⇔ χf scindé ou la trigonalisation simultanée.??

FORMES QUADRATIQUES ???