

226 - Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1}=f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.

| | |
|--------------------------|--|
| ➤ Références | [GOU_ANA], [Allaire], [40dev-ANA], [MODE_Proba], [Carnet voyage algébrerie], [Carnet voyage analystan] |
| 📁 Section | Analyse |
| 📅 Date | @13 novembre 2024 |
| ☰ Statut leçon | Plan détaillé ok |
| ☰ Enseignant | Bachir Bekka |
| ➤ Développements choisis | <u>Matrice circulante et polygones réguliers</u> , <u>Méthode de gradient à pas optimal</u> |
| 🔍 Nb choisis | 2 |
| ➤ Développements | <u>Matrice circulante et polygones réguliers</u> |

Rapport de Jury

Introduction

- fais le choix de se placer dans $\mathbb{R} / \mathbb{R}^n$
- bon nombre de suites de la vie courante s'exprime de cette façon: apparaissent partout: systèmes économiques, croissance d'une population. Besoin d'outils pour les étudier. Evolution au cours du temps ou d'étapes

Plans

▼ Plan

- I. Suites récurrentes
 1. Définitions et exemples
 2. Etude selon les propriétés de f
- II. Etude des points fixes
 1. Théorèmes de points fixes
 2. Classification
- III. Applications à trois problèmes
 1. Recherche des zéros d'une fonction
 2. Résolution de solutions approchées de $AX=B$
 3. Recherche de solutions approchées d'équations différentielles

Annexe: dessins + polygones + Newton + gradient

▼ Plan détaillé

- ▼ I.1. Définitions et exemples
 - Gourdon, Agreg interne
 - définition suite récurrente d'ordre h
 - ex Fibonacci [pas ref]
 - rq: pour toute suite récurrence d'ordre $h>1$ peut se ramener à suite vectorielle d'ordre 1
 - ex Fibonacci [pas ref]
 - ° Quelques exemples (de suites connues)
 - ex: arithmétique, géométrique, arithmético géométrique [Gourdon]
 - récurrentes linéaires à coeff constant et écriture avec matrices + rq sait résoudre récurrentes linéaires d'ordre 2 + ex Fibonacci
 - Polygones DEV 1
 - rq: si deux suites vérifient même relation de récurrence et même CI alors égales: nbr de Bell version Romaric
- ▼ I.2. Etude selon les propriétés de f
 - Gourdon, Agreg interne
 - ° Cas suite réelle fonction monotone
 - cas f croissante
 - f décroissante
 - un ex ?
 - ° Cas d'une fonction continue
 - si un converge vers l alors l point fixe de f
 - ex gourdon sur $[0,1]$?

- ex Markov ? si converge vers P_i infini alors $P_i P = P_i$ + théorème ça converge vers proba invariante
- théorème Damien sur équivalence (Bernis et Bernis ?)

▼ II. 1. Théorèmes de points fixes

- f continue de $[a,b]$ dans $[a,b]$ admet au moins un point fixe TVI
- f croissante de $[a,b]$ dans $[a,b]$ alors au moins un point fixe dans l'intervalle **ref ?**
- théorème de point fixe de Banach
- un contre exemple
- un exemple
- cas compact

▼ II. 2. Classification des points fixes

→ Rouvière ?

- point fixe attractif
- (superattractif)
- répulsif
- exemples ?
- (vitesse de convergence ?)

▼ III. 1 Recherche des zéros d'une fonction

→ Ref ?

- Dichotomie: si f ne s'annule qu'une fois sur un intervalle peut approcher zéro par Dichotomie + principe de l'algo
- Newton théo + principe + schema annexe + dimension supérieure

▼ III.2. Recherche d'une solution approchées

° Méthodes itératives $M X = N X + b$ ($A = M - N$)

→ Allaire

- définition méthode itérative + def convergence + critère de convergence
- ex méthode Jacobi
- ex méthode Gauss Seidel
- ex relaxation

° Méthode de gradient

→ Allaire/ Bernis et Bernis

- lien avec système (itératif ? moindre carrés)
- Théorème d'équivalence entre \tilde{X} est solution de $AX = b$ SSI \tilde{X} minimise la fonctionnelle convexe
- inégalité Kantorovitch
- méthode du gradient avec vitesse de Convergence

▼ III.3. Recherche de solutions approchées d'équations différentielles

→ ref ?

- Schema d'Euler explicité
- Schema d'Euler implicité

- manque d'exemple $u_{n+1} = \sin u_n$
- homographique
- suites récurrentes d'ordre 2, exemple ?

- Markov convergence vers proba invariante ?
- classification des points fixes cas vectoriel ? Laura ?