

158 - Endomorphisme remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).

➤ Références	[ROM_AG]
📁 Section	Algèbre
📅 Date	@20 novembre 2024
☰ Statut leçon	Plan détaillé ok
☰ Enseignant	Bachir Bekka
➤ Développements choisis	Groupe $O(k, l)$, Réduction des endomorphismes normaux - eucliden
🔍 Nb choisis	2
➤ Autres développements à case comme item	Simplicité de $SO_3(\mathbb{R})$
➤ Développements	Simplicité de $SO_3(\mathbb{R})$, Réduction des endomorphismes normaux - eucliden

Rapport de Jury

- théorème spectral auto adjoint
- lemme des noyaux ou dunford pas adaptés
- orthogonal d'un sev stable est stable mis en valeur
- reduction endo normaux
- étude projection orthogonale, réflexion, rotations, renversement...
- illustrations avec moindre carrés, lien hyp de rang plein avec tAA inversible

Introduction

→ structure euclidienne: géométrie. Traduction en terme d'équation pour automatisé

→ cherche à créer un cadre pour étudier les propriétés des transformations géométriques usuelles: les rotations, les projections et les symétries le tout dans un cadre euclidien nécessaire à la définition d'angle

Plans

▼ Plan

Cadre: euclidien avec machin ps

- I. Adjoint et endo normaux
 1. Adjoint
 2. Endomorphisme normaux
- II. Endomorphismes auto-adjoint = symétrique
 1. Généralités
 2. Endo symétriques positifs et définis positifs
- III. Endomorphisme orthogonal
 1. Définition
 2. Groupe orthogonal
- IV. Décomposition polaire

Annexe: schema reflexion, renversements dans \mathbb{R}^3

▼ Plan détaillé

- ▼ I.1. Adjoint d'un endomorphisme
 - Griffone
 - définition endomorphisme adjoint
 - matrice dans bon de l'adjoint est la transposée
 - csq: propriétés de l'adjoint
 - exo Griffone p 262, exo 21
 - prop $\ker(u^*) = \text{Im} u$ orth et inversement
 - Gourdon p 268
 - si F stable par u alors F orth stable par u^*
- ▼ I.2. Endomorphisme normaux
 - déf u normal
 - prop u est normal ssi $\|u(x)\| = \|u^*(x)\|$ pour tout x (Rombaldi)
 - stabilité des sev: F orth stable par u et F stable par u^*
 - **théorème de réduction DEV 1**
 - ex les endo anti auto adjoint et l'application du théorème
- ▼ II. 1. Def, exemples et réduction
 - def endo symétrique + lien matrice + notation $S_n + r_q$ ce sont des endomorphisme normaux

- ex projecteur orthogonal (+ def) est un endo symétrique on a même projecteur est un endo symétrique ssi c'est un projecteur orthogonal
- contre ex: les symétries (+def) en générale ne sont pas des endo symétriques mais sym ortho (+def) oui
- csq réduction avant \Rightarrow théorème spectral + rq: valeurs propres sont réelles
- diagonalisation simultanée ? + ex de matrice symétrique: formes quadratique + diagonalisation simultanée forme quadratique

▼ II. 2. Endo sym positif et déf positif

\rightarrow Rombaldi

- définition positif / défini positif
- rq pareil matrice
- prop: M appartient S_n^+ et $S_{n \times n}^{++}$ ssi toutes val propres positives / strictement positifs + corollaire: A dans S_n^+ ssi B tq $A = tBB$
- existence et unicité d'une racine carrée pour A symétrique positive
- exp: $S_n \rightarrow S_{n \times n}^{++}$ homéomorphisme

° Utilisation des matrices symétriques positives : moindres carrés / gradient à pas optimal

▼ III. 1 Définition

- def endo orthogonal et définitions équivalentes (isométrie, préserve produit scalaire, bon en bon) + matrices avec la transposée
- ex: symétrie orthogonale est une isométrie, on a même qu'une symétrie est une isométrie ssi symétrie orthogonale en particulier réflexions et renversements
- contre ex: projecteur orthogonal pas endo orthogonal
- prop valeur propre 1 ou -1
- réduction isométries (csq trucs avant)

▼ III.2. Groupe orthogonal

- $O_n + SO_n$
- O_n engendré par réflexions, SO_n renversements
- centre pour SO_3 si veut mais pas nan plus nécessaire que soit écrit
- dérivés si pense que nécessaire et doit combler
- principes de conjugaison des sym orthogonal de plan stables de même dimension

° Topologie:

- compacité de O_n et SO_n
- O_n deux comp connexes et SO_n connexe par arcs
- app: SO_3 simple

° Cas dim 2 et 3 ?

▼ IV. Décomposition polaire

- décomposition polaire + ex
- (Cartan ?)
- app: app norme 2 p263 [GOU]
- application: étude de $O(k,l)$ DEV 2 et 4 composantes connexes

- symétrie orthog equi symétrique + orthogonal equi symétrique + symétrie ??

