157 - Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.

➤ Références	[Griff], [MODE_Proba], [GOU_AGP], [NH2G2.T1], [PGCD]
📁 Section	Algèbre
📅 Date	@14 mai 2025
☰ Statut leçon	Plan détaillé ok REF !
👤 Enseignant	Christophe Mourougane
🔍 Nb choisis	0
➤ Autres développements à case comme item	<u>Matrice de Gram + Hadamard</u>
➤ Développements	<u>Méthode de gradient à pas optimal</u> , <u>Lemme de Morse</u> , <u>Groupe O(k,l)</u> .

Rapport de Jury

- théo spectral indispensable
- mat sym positives et définies positives: prop, rôle et structure de leur ensemble
- signature pourra être présentée: détermine classe congruence mat sym réelle
- action GL et GO sur l'espace des matrices sym
- lien avec forme quadra et hermitienne
- orthogonalisation simultanée + applications géométriques aux quadriques

En +:

- matrices de cov + condition inversible
- décompo Cholesky + calcul scientifique ou proba (construction vecteur gaussien tq mat covariance)
- décompo SVD

Introduction

- matrices particulières qui apparaissent naturellement dans les covariance de vecteurs
- ici s'intéresse à quels objets peuvent être représentés par une matrice symétrique (endo auto adjoint et forme quadratique)
- théorème spectral → sait très bien manipuler les matrices hermitiennes et symétriques
- matrice cool pour résolution de système: cholesky, Gradient..

Plans

▼ Plan

- I. Cas général
 1. Ensemble des matrices symétriques et hermitiennes
 2. Lien avec formes bilinéaires
 3. Action de GL et O
- II. Le cas des matrices positives et définies positives
 1. Définition et caractérisations
 2. Racines carrées et conséquences
 3. Matrice de covariance
 4. Recherche d'extrema

▼ Plan détaillé

- ▼ I.1. Ensemble des matrices symétriques et hermitiennes
 - définition matrice sym + hermitienne et notation des ensembles
 - ex de matrices numérique + ex de la hessienne d'une fonction C2 (Schwarz)
 - endo symétrique: def + prop: lien avec matrice + ex ?
 - valeurs propres de sym réelles et hermitienne (sous entendu cplx) sont réelles + c-ex: matrice cplx sym dont vp non réelles (appuyer à l'oral la diff)

°Ensembles considérés

 - prop: ce sont des R ev de dimension respectives $S_n: n(n+1)/2$ et $H_n: n^2$ sur R mais $H_n(\mathbb{C})$ n'est pas un C- ev
 - prop: sommes directes $H_n(\mathbb{C}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus iA_n(\mathbb{R})$ et $M_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$
 - app ? (oral décompo dans M_n très utile: ex Morse, étude de la trace..)
- ▼ I.2. Lien avec les formes bilinéaires
 - def forme bilinéaire, quadratique et hermitienne

- forme polaire
 - lien avec matrice
 - ex de l'écriture de matrices de formes hermitiennes/quadratique
- ▼ I. 3. Actions de GL et O
- Action par congruence (GL sur S_n) [NH2G2]
 - Sylvester (quadra sur R) : classe les orbites + réduction des formes quadratiques + app: lemme de Morse
 - équivalent pour forme hermitienne sur C
 - Action par conjugaison (O sur S_n)
 - théorème spectral/réduction normaux
- ▼ II. 1. Définition et caractérisations
- attention à quoi est vrai pour sym réelle et hermitienne ou que pour sym réelle, sais pas
- définition sym/herm positive
 - ex: A^*A est toujours hermitienne/sym positive
 - app: def matrice de Gram + matrice de gram est mat herm positive [GOU_AG]
 - définie positive
 - ex: la matrice de Gram de n vecteurs $x_1, \dots, x_n$ est définie positive si la famille $(x_i)_{i \in J}; n \in \mathbb{K}$ est libre. [GOU_AG]
 - prop: équivalence avec valeurs propres (besoin théo spectral)
 - rq: quand sym positive, inversible equi def positive
 - S_{n++} ouvert de $M_n(\mathbb{R})$, application ??
 - (critère de Sylvester: critère pour définie positive)
- (Un peu retour partie avant)
- Lien entre une matrice définie positive et une forme quadratique définie positive
 - ex: produit scalaire
 - théo: orthogonalisation simultanée formes quadratiques
- ▼ II.2. Racines carrées et conséquences
- existence et unicité racine carré pour sym positive + si def pos alors def pos + racine carrée Hermitienne
 - app: matrice de Gram: réciproque d'avant: toute matrice hermitienne positive est matrice de Gram et définie positive $\Rightarrow$ xi libre
 - exponentielle homéo de $S_n \rightarrow S_{n++}$ et pareil H_n
 - décomposition polaire dans les deux aussi + app égalité avec rayon spectral
 - Etude de $O(k,l)$ DEV 1
- ▼ II. 3. Matrice de covariance
- def mat covariance
 - toute matrice de covariance est symétrique positive
 - construction de vecteurs de matrice de covariance donnée
 - app: toute matrice positive est la matrice de covariance d'un vecteur gaussien
 - (inversible/densité)
- ▼ II. 4. Recherche d'extrema
- caractérisation des points critiques grâce à la Hessienne
 - ex: ou besoin réduction de Gauss

▼ II. 5. Résolution de systèmes linéaires

- lemme fonctionnelle quadratique
 - Gradient à pas optimal DEV 2
 - Algo de Cholesky
-
- avoir en tête application de déterminant de Gram
 - regarder Cholesky: algorithme
 - exercice recherche extrema quotient de deux formes quadratiques grâce réduction simultanée