156 - Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

➤ Références	[Obj_pas_chômage], [GOU_AGP], [Mansuy], [Carnet_voyage_algèbre]
📁 Section	Algèbre
📅 Date	@23 avril 2025
☰ Statut leçon	Plan détaillé ok REF !
👤 Enseignant	Ludovic Marquis
➤ Développements choisis	Lemme de Fitting et dénombrement des matrices nilpotentes sur F_q , Décomposition de Dunford
🔍 Nb choisis	2
➤ Développements	Lemme de Fitting et dénombrement des matrices nilpotentes sur F_q

Rapport de Jury

Introduction

- deux types d'endomorphismes particuliers
- nilpotents cas particuliers de trigonalisables

Plans

▼ Plan

- I. Endomorphismes trigonalisables
 1. Définition
 2. Trigo simultanée
 3. Prop topologiques
- II. Endomorphismes nilpotents
- III. Application à la réduction
 1. Décomposition de Dunford
 2. Décomposition de Jordan

▼ Plan détaillé

- ▼ I. Trigonalisables
 1. Définition
 - def trigb + valeur sur la diag sont les vp + lien matrice endomorphisme
 - trigb ssi admet pol annulateur scindé ssi pol min scindé
 - ex : truc C-trigb mais pas R-trigb [OA]
 - corollaire : si corps alg clos, tous trigb
 - (prop : si trigb alors induit sur sev stable trigb)
 - prop : si trigb alors formule pour la trace et le det
 - prop : si A trigb, $\exp(A)$ trigb et spectre = $\{e^\lambda\}$
 - app trigonalisation : résolution de système linéaire ou d'EDO linéaire à coeff constants
 2. Trigonalisation simultanée
 - trigonalisation simultanée
 - app : endo trigb qui commutent alors somme et compo encore trigb
 - (contre-ex : 2 mat co-trigb mais qui commutent pas)
 3. Propriétés topologiques
 - prop : ensemble des mat trigb dense dans $M_n(K)$
 - prop : matrice diag à n vp dense dans trigb
- ▼ II. Nilpotents
 - def nilpotent
 - ex : dérivaton dans polynomes à deg $\leq n$ nilpotent [OA]
 - prop : 2 nilpotents qui commutent alors somme et produit nilpotent
 - prop : pol min et pol car ssi nilpotent

- nilpotent ssi trigb supérieur stricte (d'après la partie précédente)
- si nilpotent, endo induit sur sev stable nilpotent
- si nilpotent, suite des noyaux itérés stationnaires à partir de l'indice de nilpotence
- critère de nilpotence par la trace (vrai que en car 0 ou plus grande que n)
- contre-ex : quand car pas nulle
- si u et v nilpotent et commutent alors u+v et uov nilpotents
- Fitting + dénombrement des matrices nilpotentes de $M_n(\mathbb{F}_q)$ DEV1

▼ III. 1. Décomposition de Dunford

- (réduction sur les sc)
- décomposition de Dunford DEV 2
- app : A diagb ssi $\exp(A)$ diagb faux dans R contre ex Tauvel
- ex : calcul explicite de décompo
- app : lemme de décroissance exponentielle
- prop : l'application qui a une matrice associe sa partie diagonalisable dans la décompo de Dunford est pas diagb (app de diagb à vp distincte dense dans $M_n(\mathbb{C})=T_n(\mathbb{C})$)

▼ III.2. Décomposition de Jordan

- jordan pour les nilpotents
- rq : jordan pour les cycliques + passage à Frobenius
- app : calcul exp + EDO?
- app : deux nilpotents sont semblables si dimensions des noyaux itérés égales