155- Exponentielle de matrices. Applications.

➤ Références	[ROM_AG], [Griff], [GOU_AGP], [M2M], [NH2G2.T1]
📁 Section	Algèbre
📅 Date	@27 novembre 2024
☰ Statut leçon	Plan détaillé ok
☰ Enseignant	Bachir Bekka
➤ Développements choisis	Groupe $O(k, l)$, Image de l'exponentielle, Décomposition de Dunford
🔍 Nb choisis	3
➤ Développements	Image de l'exponentielle, Groupe $O(k, l)$, Décomposition de Dunford

Rapport de Jury

- Attention aux convergences
- questions surjectivité et injectivité R/C
- image par exponentielle des sgrps (sym, hermitienne, antisym)
- dunford multiplicative
- décomposition polaire → étude sous groupe GL
- équa diff
- faire le lien entre réduction et comportement asymptotique

Introduction

- généralisation naturelle de l'exp
- utile à la fois en algèbre et analyse

Plans

▼ Plan

- I. Définition et calcul
 1. Définition et premières propriétés
 2. Calcul de l'exponentielle d'une matrice
- II. Etude de la fonction $t \rightarrow \exp(tA)$
 1. Caractère Cinfini
 2. Application aux équations différentielles linéaires
- III. Etude de $A \rightarrow \exp(A)$
 1. Régularité
 2. Bijectivité de $M_n(K)$ dans $GL_n(K)$?
 3. Etude de la restriction à des sous espaces remarquables

▼ Plan détaillé

- ▼ I.1. Déf et premières prop
 - définition et convergence
 - $\exp(\lambda \text{id}) = e^\lambda \text{id}$
- ° prop de bases
 - Prop : Si A, B commutent, alors $\exp(A + B) = \exp A \exp B$ + contre ex
 - prop: inversible d'inverse machin
 - $\det \exp A = \exp(\text{tr}(A)) \Rightarrow$ rq: retrouve dans GLn
 - $\exp(\text{transpo } A) = \text{transpo } \exp A$
 - $\exp(P A P^{-1}) = P \exp A P^{-1}$
 - $\exp(A) \in K[A]$
Corollaire : $\exp(A)$ commute avec A

attention vérifier pas besoin truc pour diagonale ou quoi
- ▼ I. 2. Calcul de l'exponentielle d'une matrice
 - A diagonale
 - N nilpotente
 - A diagonalisable:
 - Les valeurs propres de $\exp A$ sont les exponentielles des valeurs propres de A
 - Utilisation d'une relation de récurrence pour calculer l'exponentielle
 - Utilisation du binôme de Newton (attention à la commutativité)+ ex: $\exp\left(\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}\right) = \exp(a) \begin{bmatrix} \cos(b) & -\sin(b) \\ \sin(b) & \cos(b) \end{bmatrix}$ (apparaît souvent) [ROM] + app: limite $(I_n + A/k)^k = \exp(A)$

- Décomposition de Dunford
- app: $A \text{ diagb} \Leftrightarrow \exp(A) \text{ diagb}$. faux dans $\mathbb{R}$ contre ex Tauvel
- app: Dunford multiplicatif
- prop Jordan

▼ II. 1. Régularité

- dérivable et dérivée et dérivée elle même +
- $\exp tA$ Cinfini où ??
- attention besoin solution pb Cauchy ici
- rq retrouve les mêmes prop qu'avant
- commutent ssi pour tout t le truc $\exp(t(A+B)) = \exp(tA)\exp(tB)$

▼ II. 2. Application aux équations diff linéaires

- solution du problème de Cauchy
- duhamel, résolvante ?
- stabilité asymptotique (si $\text{Re}(\lambda) < 0$ pour tout λ alors toute solution tend vers 0 (app de Dunford))
- exemple

▼ III. 1 Régularité

- continuité de $M_n(K) \rightarrow M_n(K)$
- de classe C^1 + différentielle si sait faire (Romb ou PGCD ex 39)

▼ III.2. Bijectivité de $M_n(K)$ dans $GL_n(K)$?

° surjectivité

- théorème: $\exp(C[A]) = C[A]^\times$
- cor: $\exp(M_n(\mathbb{C})) = GL_n(\mathbb{C})$ en particulier surjectivité + (garder en tête $GL_n(\mathbb{C})$ connexe par arcs) (bof en app car nous on s'en sert dans la démo d'image de l'exponentielle donc malvenu de mettre là je crois plutôt mettre application racine p -ième)
- cor: $\exp(M_n(\mathbb{R})) = \{A^2, A \in GL_n(\mathbb{R})\}$ en particulier pas surjective

° injectivité

- contre ex ni injective sur $\mathbb{C}$ ni sur $\mathbb{R}$ (sur $\mathbb{C}$ dans [ROM], sur $\mathbb{R}$?)

▼ III. 3. Etude de la restriction à des sous-espaces remarquables

- $\exp : D_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ est injective (FGN alg 02)
- Homéomorphisme $\exp : S_n(\mathbb{R}) \rightarrow S_{n++}(\mathbb{R})$ (rq aussi version complexe avec matrices hermitiennes)
Décomposition polaire (app étude sgrp de GL ??) + (app: $GL_n(\mathbb{R}) \times O_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$) + app:
Etude du groupe $O(k,l)$ et composantes connexes
- $\exp : A_n(\mathbb{R}) \rightarrow SO_n(\mathbb{R})$ surjective non injective (FGN alg 3? Pas trouvé)

- logarithme matriciel + bijection de N dans Unipotent dans Tauvel
- connaître Lyapounov cas non linéaire, équation linéarisée tout ça tout ça
- décomposition polaire $\rightarrow$ étude sous groupe GL