221 - Équations différentielles linéaires. Systèmes d’équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

Références	[Wadi] , [Berthelin], [GOU_ANA], [Zully_queff], [MODE_Proba], [FGN-6]
Section	Analyse
Date	@23 avril 2025
Statut leçon	Plan détaillé ok
Enseignant	Isabelle Gruais
Développements choisis	Lyapounov, Nbr zéros équa diff
Nb choisis	2

Rapport de Jury

La théorie de Cauchy-Lipschitz linéaire est une porte d'entrée naturelle pour cette leçon. La complétude (via la méthode des approximations successives) y joue un rôle crucial, et la preuve est un exemple fondamental d'intervention de la dimension finie en analyse. Sans que cet aspect devienne trop prépondérant, les candidates et candidats peuvent proposer quelques exemples de résolutions explicites : cas scalaire d'ordre un qui fait intervenir des outils élémentaires, cas des coefficients constants avec l'exponentielle de matrice (qui mobilise fortement la réduction des endomorphismes), utilisation de séries entières ou de séries de Fourier, variation des constantes, etc. On se gardera d'aborder des théorèmes généraux s'appliquant au cas non linéaire qui sont réservés à la leçon 220.
Même dans le cadre linéaire, les études qualitatives présentent un grand intérêt et fournissent de nombreuses possibilités : étude du comportement asymptotique des solutions (pour lequel le lemme de Grönwall est un outil d'une grande efficacité), de la distribution des zéros, du Wronskien, etc. Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser à la linéarisation d'équations non linéaires au voisinage d'un point d'équilibre, proposer des exemples de problèmes aux limites (théorie de Sturm-Liouville) ou d'études d'équations aux dérivées partielles linéaires.

Introduction

→ les équations différentielles apparaissent souvent et notamment en physique lorsque qu’on étudie le comportement de systèmes qu’ils soient mécaniques ou électriques.

→le cas particuliers des EDL apparaît souvent naturellement ou après des approximations, les connaît mieux (résolution) et permettent aussi d’étudier les non linéaires

Plans

▼ ***Plan***

Cadre: notations du système + rq vectoriser

I. Etudes des solutions

1. Existence et unicité de solutions
2. Structure de l’ensemble des solutions
3. Expression théorique des solutions

II. Résolution pratique

1. Systèmes homogènes
2. Systèmes avec second membre

III. Etudes qualitatives

1. Un exemple: y’’+qy=0
2. Stabilité de systèmes autonomes linéaires
3. Application à l’étude de systèmes non linéaires

Annexe: portraits de phase

▼ ***Plan détaillé***

▼ I.1. Existence et unicité de solutions

- def solution globale
- Cauchy Lipschitz linéaire (voir si besoin Gronwall)

▼ I. 2. Structure de l’ensemble des solutions

° Equation homogène

- l’ensemble des solutions de l’équation homogène est un ev de dimension p
- Wronskien:
    - définition
    - cas des équations scalaires d’ordre 2
    - prop: base de solutions ssi wronskien ne s’annule pas

° Avec second membre

- + si xp solution particulière alors écriture de l’ensemble des Solutions
- app: équation linéaire scalaire d’ordre → dimension p

▼ I. 3. Expression théorique des solutions

- def résolvante

- petites propriétés
- formule de Duhamel
- app ?

▼ II. 1. Systèmes homogènes Y'=A(t)Y

° dimension 1:

- y(t)=lambda exp Y(t)
- app: Bell

° si A constant

- expression avec l'exponentielle: résolvante = exponentielle
- ex: oscillateur harmonique

° méthode avec Wronskien

- ex où permet de trouver une deuxième solutions avec la méthode

▼ II. 2. Systèmes avec second membre

- si connaît base de solution: Xp solution ssi somme des cj' phi_j = b
- rq: n=1 retrouve expression habituelle
- app: equation scalaire d'ordre 2
- ex: oscillateur harmonique forcé

▼ III.1. Un exemple: étude de y''+q(t)y=0

→ Gourdon, Zully-Queffelec

- si q est L1⇒ (la dérivée de) toute solution bornée tend vers 0 à l'infini et l'équation admet solution non bornées [GOU]
- si q négative, la seule solution bornée est la fct nulle et toute solution non nulle s'annule au plus une fois [GOU]
- DEV 1: nbr de zéros si q est C1 + autres hyp alors y s'annule une infinité de fois .. [ZQ]

▼ III.2. Stabilité des systèmes linéaires autonomes

→

- def pt équilibre + type + schema en annexe
- ex ?
- étude des points d'équilibre se ramène à l'étude de la stabilité de 0 ????
- critère de Routh
- portraits de phase DEM (cas 2×2 autonome, linéaire) + bilan det/tr

▼ III.3. Application à l'étude de la stabilité de systèmes non linéaires

→

- lemme de décroissance exponentielle
- théorème stabilité en première approche=Lyapounov DEV 2
- instabilité ? admis
- ex du pendule avec frottements