153 - Valeurs propres, vecteurs propres. Calculs exacts ou approchés d’éléments propres. Applications.

Section	Algèbre
Date	@15 janvier 2025
Statut leçon	Plan détaillé ok
Enseignant	Christophe Mourougane
Développements choisis	Méthode de gradient à pas optimal, Matrice circulante et polygones réguliers
Nb choisis	2
Développements	Matrice circulante et polygones réguliers

Rapport de Jury

149 : Valeurs propres, vecteurs propres. Calculs exacts ou approchés d'éléments propres. Applications.
Cette leçon doit aborder le bagage théorique propre aux vecteurs propres et aux valeurs propres et mettre en lumière l'exploitation de techniques d'algèbre ou d'analyse pour aborder leur recherche. Après avoir exploré la détermination théorique exacte des éléments propres, on s'intéresse à des exemples de matrices dont les éléments propres sont remarquables (matrices compagnons, matrices circulantes, matrices d'ordre ni, matrices stochastiques...) et donne des exemples de situations où la connaissance d'éléments propres s'avère utile. On doit connaître les limites du calcul exact, même si le cadre mathématique nécessaire est non exigible et hors programme, et introduire sur R ou C une ou plusieurs méthodes itératives, dont on démontre la convergence. On peut citer les méthodes de la puissance, puissance inverse et QR pour la recherche d'éléments propres. Les notions de norme matricielle, de rayon spectral doivent être maîtrisées. Le lien avec la convergence des suites du type Xn1 = AXn doit être connu et illustré. On peut aussi s'intéresser à la localisation des valeurs propres.
Pour aller plus loin, on peut aborder la problématique du conditionnement en distinguant le problème général et le cas particulier des matrices auto-adjointes, s'intéresser aux liens qui peuvent aussi être faits avec la théorie des représentations et la transformée de Fourier rapide, ainsi qu'au comportement de la suite des itérées de matrices stochastiques ou plus généralement de matrices à coefficients positifs, au moins dans des cas particuliers.

Introduction

- Connaître les éléments permet de mieux connaître le comportement de l’endomorphisme: connait les directions selon laquelle agit comme homothétie
- quand veut diagonaliser: recherche de vp
- aussi app: EDO et proba
- Quand theo spectral parle aussi dunford sous espace caractéristiques

Plans

▼ ***Plan***

I. Notion d’éléments propres

1. Définitions
2. Calcul Exact
3. Diagonalisabilité ou trigonalisabilité

II. Applications

1. Critères de convergence de méthodes itératives
2. Proba
3. Equa diff

III. Calcul approché d’éléments propres

Annexe: polygones réguliers

▼ ***Plan détaillé***

▼ I.1. Def

- def valeur propre / vect propre / sep
- matrice ↔ endomorphismes
- ex si A est stochastique, 1 est val propre et (1…1) vect propre associé à 1
- rq: inversible ssi 0 n’est pas vp
- “Localisation” sans définir le disque
22

▼ I.2. Calcul exact

- prop: les vp sont les racines du poly minimal ex: nilpotente ⇒ Vp sont nulles
- prop: les vp sont les racines du polynôme caractéristique et du polynôme minimal

- app: méthode pour trouver les vp et après résout système pour vecteur propre
- ex concret de méthode pour trouver

▼ I. 3. Diagonalisabilité et trigonalisabilité

- Def diago trigo
- Si A diago, exp A diago dans meme base
- Si n val propre distinctes alors diagonalisable
- DEV 1: matrice circulante et polygones réguliers + dessin annexe **pas app de ça enfait**
- digo ssi poly minimal scindé racines simple ssi pour toute vp multiplicité geo = dim sep
- trigoB ssi poly caract scindé
- rq si K algebriquement clos: tout trigo
- toute matrice de A trigonalisable, sp(exp(A))={exp(Sp(A))}
- trace = somme vp, determinant = produit vp
- “méthode de la trace” exo de prepa qui donne lambda 1 limite quotient trace
- coro: théorème spectral + app Rayleigh ? + kantorovitch ici ?

▼ II. 1. Critères de convergences de méthodes itératives

- définition conditionnement
- dépendance des perturbations en fonction conditionnement
- si A normale expression conditionnement norme 2
- ex Laplacien
- gradient pas optimal DEV2
- lien ro et inf norme subordonnée
- équivalence A^k → 0, ||A||<1 et p(A)<1
- Si veux ro = lim k ||A^k ||^1/k
- xk+1=Axk CV vers 0 ssi vérifie une des conditions
- méthode itérative A=M-N sûre de CV
- app Laplacien

▼ II.2. EDO

- solutions en fonction des valeurs propres et vect propres pour EDO linéaire exp(lam t)V

° Stabilité

- pour EDO linéaire: stable si lambda toutes de parties réelles négatives, AS sSi strictement neagtif et quand nul non defective
- Lyapounov

▼ II.3. Chaîne de Markov

- définition chaîne de Markov + si espace d’états fini: matrice de transition + rq: infini / graphe
- ex chaîne à 2 états
- def irréductible: + marche à 2 états
- def apériodique + marche à 2 états
- Perron Frobenius + faire lien avec matrice de transition d’une chaîne irréductible apériodique
- fini + apériodique + irred: unique proba invariante et cv qqsoit loi initiale

- ex marche à 2 états et expression proba invariante

▼ III. Calcul approché

- méthode de la puissance
- méthode de la puissance inverse
- (QR)

- réduction endo normaux ?