220 - Illustrer par des exemples la théorie des EDO.

Références	[GOU_ANA], [Berthelin], [Wadi] , [Zully_queff]
Section	Analyse
Date	@5 février 2025
Statut leçon	Plan détaillé ok
Enseignant	Isabelle Gruais
Développements choisis	Lyapounov, Nbr zéros équa diff
Nb choisis	2

Rapport de Jury

- théorie CL non linéaire: plusieurs pts: local→ global, explosion en temps fini
- éviter large portion à théo généraux
- moins exemples mais analyser avec soins, méthodes variés
- résolution explicité + étude qualitative non linéaire ordre 1 ou 2, autonome plan
- vectorisation
- exemples études: dessins, portraits de phase, éléments géométriques pour les construire, pts equilibre, champs vecteurs, isocline, int première, symétrie
- + loin: linéarisation au voisinage d'un pt équilibre

Introduction

Accroche: les équations différentielles apparaissent souvent et notamment en physique lorsque qu'on étudie le comportement de systèmes qu'ils soient mécaniques ou électriques.

Vectorisation

I. Avant de se mettre à la recherche des solutions, nous voulons nous assurer qu'elles existent. Commence par étudier l'existence et l'unicité de solutions tout d'abord de solutions maximales. Et pour ça il y a notamment un théo: le théo de CL local. Nous l'utilisons souvent en pratique avec l'hypothèse C1 qui implique le caractère localement lipschitzien par rapport à la seconde variable comme nous pouvons le voir dans l'exemple du système de Lotka Volterra qui modélise l'évolution d'une population.

Pour garantir l'existence de solutions, nous avons également le théorème de Cauchy Péano qui n'utilise que le caractère continue de la fonction f, mais avec lequel nous n'avons pas l'unicité de solutions comme nous pouvons le voir avec l'exemple ??

II. On va ensuite se concentrer sur quelques situations où l'on sait résoudre l'équation. La situations qui nous est la plus favorable pour cela est le cas des systèmes linéaires. Si l'on s'intéresse l'équation homogène: on ne sait pas toujours trouver l'ensemble des solutions mais on le sait en dimension 1 (prop ?) ou lorsque que l'on a des coefficients constants: exponentielle de matrice. On retrouver à l'ex ? la solution de l'équation d'un oscillateur harmonique.

Ensuite, quand on s'intéresse à la solution d'une équation avec second membre connaissant une base de solutions de l'équation homogène, on peut utiliser la méthode de variation de la constante qui est expliquée

Dès lors, on peut tracer les portraits de phase des systèmes linéaire 2×2 selon les valeurs propres de A, c'est ce que vous retrouvez en annexe.

III. Dans certains cas la résolution est facile (cas des équations différentielles linéaires), mais dans la majorité des cas nous devons nous contenter d'une étude qualitative des solutions pour en connaître quelques propriétés. On cherche à connaître leur régularité, leur
monotonie ou leur zéros. Parfois quand sait pas résoudre (et même quand sait résoudre mais qu'on peut pas en dire grand chose), on essaie d'avoir des informations qualitatives sur les solutions. C'est ce que l'on illustre dans la première sous-partie avec l'étude d'une équation scalaire du second ordre de la forme y" + qy=0. Selon diff hypothèses sur q, on a des résultats différents sur l'existence de solutions bornées par exemples ou le nombre de zéros. On peut par exemple, sous certaines hypothèses, qui en physique notamment ne sont pas ?? (exagérées), trouver un équivalent du nombre de zéros des solutions non nulles et cela constituera notre premier développement. Arès cette étude particulière on s'intéressera à l'étude des systèmes autonomes cad les équations qui peuvent s'écrire sous la forme y'=f(y) où f n'a pas de variable de temps. On introduit alors la notion de point d'équilibre. Sur un portrait de phase comme celui tracé en annexe, cela corrrespond aux intersections des isoclines. En def, on distingue alors les points d'équilibre selon leur stabilité, l'objectif est de pouvoir étudier la stabilité des points cad si on déplace un peu la condition initiale, est ce que la solution du pb de Cauchy va rester proche de notre pt d'équilibre, c'est ce qu'on appelle la stabilité ou si même la solution va tendre vers le pt d'équilibre, on dit alors que le pt est asymptotiquement stable.

Grâce au critère de Routh, on a un premier critère pour étudier la stabilité des systèmes linéaire homogènes en s'intéressant aux valeurs propres de la matrice. Dans le cas des systèmes 2×2, on peut alors faire une étude des cas possibles et cela est bien cohérent avec les portraits de phases que l'on peut tracer suite à la résolution de la partie 2.

Mais comme ce critère ne fonctionne que pour les systèmes linéaires, on aimerait avoir un critère pour ceux qui ne sont pas linéaires. Et pour cela on a le théorème de linéarisation de Lyapounov qui permet de conclure sur la stabilité asymptotique et qui sera notre deuxième développement et également un citère pour l'instabilité. On cloturera alors l'exemple du système de Lotka Volterra où l'on ne peut pas conclure sur la stabilité du point. En effet la stabilité est une notion locale et passe pas au système linéarise. On finiera avec le pendule simple avec frottement où l'on peut ici conclure sur la stabilité des points d'équilibre et où c'est bien cohérent avec la notion réelle.

Plans

▼ ***Plan***

Notation "on cherche à résoudre "+ rq vectorisation

I. Existence et unicité de solutions

1. Théorèmes d'existence
2. Globalité des solutions

II. Résolution explicite

1. Cas linéaire
2. D'autres cas particuliers de résolutions

III. Analyse qualitative

1. Etude générale
2. Etude des points d'équilibres d'un système autonome

Lotka Volterra: dernière partie avec périodicité

Pendule Simple (Berthelin)

▼ ***Plan détaillé***

▼ I.1. Théorèmes d'existence

- déf solution maximale / globale + Globale implique maximale mais pas réciproque + c-ex y'=y^2 sur \Rx\R
- Prolongement des solutions
- lemme de Gronwall (ex 1 p 398 Gourdon)
- Cauchy Lipschitz local (C1 → loc Lip avec IAF)
- def LV + app CL + positivité
- deux solutions peuvent pas se croiser
- Cauchy Péano + ex perd unicité

▼ I. 2. Globalité des solutions

- Théo Cauchy Global
- pendule simple
- Théorème de sortie de toute compact
- ex: fonction à croissance au plus linéaire: max → global
- Ligne de niveau + intégrale premier + LV

▼ II. 1. EDO linéaires ordre 1 et 2

- ordre 1 + variation cste
- ordre 2 + var cste
- Pendule petits angles et sans frottement

▼ II.2 D'autres cas particuliers de résolution [GOUAN]

Bernoulli
Ricatti

- "on cherche des solutions" DSE → revient à résoudre une relation de récurrence - Analyse synthèse
- si déjà une solution, réduit degré EDO

▼ III.1. Quelques propriétés

→ [GOU_AN],[QUE_choco]

- ex periodicité
- y"" + q(t)y=0
- nbr de zéros

▼ III.2. Stabilité

- def pt équilibre + type + schema en annexe
- LV: (0,0) instable
- critère de Routh
- LV: conclut pas mais si veut app à périodicité

- portraits de phase DEM (cas 2×2 autonome, linéaire)
- théorème stabilité en première approche=Lyapounov DEV 2
- instabilité ?

principe d’entrelacement des zéros