# 152 - Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

| | |
|---|---|
| Références | [Griff], [Obj_pas_chômage], [GOU_AGP], [Mansuy], [Carnet voyage algébrie] |
| Section | Algèbre |
| Date | @26 mars 2025 |
| Statut leçon | Plan détaillé ok |
| Enseignant | Lionel Fourquaux |
| Développements choisis | Matrice circulante et polygones réguliers, Décomposition de Dunford |
| Nb choisis | 2 |
| Développements | Matrice circulante et polygones réguliers |

## Rapport de Jury

Dans cette leçon, on attend des exemples naturels d'endomorphismes diagonalisables et des critères de diagonalisabilité. On doit notamment savoir expliquer pourquoi l'application induite par un endomorphisme diagonalisable sur un sous-espace stable est encore diagonalisable. Il ne faut pas oublier de parler du cas des endomorphismes symétriques, ni les familles commutantes d'endomorphismes diagonalisables. On peut étudier certaines propriétés topologiques en prenant le soin de donner des précisions sur le corps K et la topologie choisie pour Mn(K). Les candidates et candidats peuvent s'intéresser aux propriétés de l'exponentielle d'un endomorphisme diagonalisable. On peut dénombrer les endomorphismes diagonalisables dans les corps fnis, ou possédant des propriétés données, liées à la diagonalisation.
Pour aller plus loin, les candidates et candidats peuvent s'intéresser aux liens qui peuvent aussi être
fait avec la théorie des représentations et la transformée de Fourier rapide.

## Introduction

→ super se ramène à un représentant plus simples,

→ étude finalement de tout le monde

## Plans

▼ ***Plan***

I. Critères de diagonalisabilité

1. Notation et définition
2. Critères généraux
3. Cas des normaux/autoadjoints

II. Calculs facilités par la diagonalisation

III. Intérêt pour l'étude des matrices en général

1. Densité des diagonalisables
2. Décompositions

Annexe : dessin polygones

▼ ***Plan détaillé***

▼ I.1. Notation et définition

- notation valeur propre, vecteur propre, sous espace propre
- polynôme minimal, polynôme caractéristique
- def diagb en précisant que les coeff diagonaux sont les vp+ ex : si diagb alors exp diagb
- lien matrices diagb/ endomorphisme diagb

▼ I. 2. Critères généraux

→ Gourdon&Mansuy

- prop : si n valeur propre, alors diagb

- prop : diagb ssi somme des dim des sous-espace propre = n + diagb ssi toutes les racines du pol car ont même mult alg et geom
- ex : numérique avec vp non simple mais même mult *[Griffone ex29p205]*
- prop : diagb ssi pol minimal SARS ssi il existe polynome annulateur SARS
- ex: si d'ordre fini + app GLn(Z)
- app : si circulante alors diagb 1ere partie DEV1
- rq : dépend du corps pol X^2+1
- app : symétries et projecteur diagb
- app : critère de diagb dans Fq (ssi A^q=A)
- dénombrement des matrices diagonalisables sur F_q
- prop : critère de co-diagb
- app : composée et somme de trucs qui commutent encore diagb *[OA]*
- (app : GLn et GLm pas isomorphes de gp) *[OA]*

▼ I. 3. Cas des normaux/autoadjoints

- réduction des normaux
- csq : théorème spectral
- ex numérique
- app : unicité de la racine carrée d'une symétrique (→ décomposition polaire)
- app : norme 2 subordonnée de A = rayon spectral de A*A

▼ II.

Calculs faciles :

- trace et det facile a calculer
- rq : vrai aussi pour trigb
- calcul de l'inverse si inversible + puissance
- app : chaine de Markov
- app : suite de polygones 2e partie DEV1
- rq : aussi cool pour calcul exponentielle

EDO :

- base de solutions de X'=AX avec A diagb

▼ III. 1. Densité des diagonalisables

→ OA

Topologie ? R ou C

- prop : densité de Dn(C) dans Mn(C)
- app : cayley hamilton
- prop : pas vrai pour Dn(R)
- prop 4.69 OA

▼ III.2. Décompositions

- décomposition de Dunford DEV 2
- app : A diagb ssi exp(A) diagb faux dans R contre ex Tauvel

° Grâce à la propriété blabla

- app: décomposition polaire
- app : exp homéomorphisme