151 - Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

Section	Algèbre
Date	@4 décembre 2024
Statut leçon	Plan détaillé ok
Enseignant	Bachir Bekka
Développements choisis	Lemme de Fitting et denombrement des matrices nilpotentes sur Fq, Réduction des endormorphismes normaux - eucliden
Nb choisis	2
Développements	Réduction des endormorphismes normaux - eucliden, Lemme de Fitting et denombrement des matrices nilpotentes sur Fq

Rapport de Jury

- prop de l'ens des sous espaces stables
- cycliques et semi-simples ont leur place (les caractériser par la fermeture de leur orbite)
- sous espaces stables par famille d'endormorphismes → prop sur endo qui commutent entre eux
- applications possibles: réduction endo normaux et ex de résolutions d'équations matricielles
- Frobenius possible

Introduction

- chercher des expressions simples des appli pour les classifier par ex. Découper l'espace en "bons" se.
- connaissance d'endomorphisme particuliers de part leurs propriétés en termes de sous-espaces stables permettent d'en déduire notamment des théorèmes de réductions sur tous les endomorphismes

Plans

▼ ***Plan***

I. Généralités sur les sous-espaces stables

1. Définition et premières propriétés
2. Endomorphismes induits et base adaptée
3. Dualité et SES

II. Sous espaces caractéristiques / sous espaces propres

1. Lemme des noyaux
2. Diagonalisation - co diagonalisation
3. Dunford

IV. Un dernier exemple: les endomorphismes normaux

III. Endomorphismes cycliques et réduction Frobenius /Jordan

Cadre: produit scalaire/hermitien

▼ ***Plan détaillé***

▼ I.1. Def et premières prop

→ Mansuy / Objectif agreg

- Déf : sous espace stable
- ajout d'un exemple concret avec la donnée d'un endomorphisme
- Prop: Ker, Im, Ker(P(u)) stables donc les sous espaces propres sont stables (P(X)=X-lambda Id) et sous espaces caractéristiques pareil

- ex: nilpotents: ses SES sont les Ker (u**k) on a un sens avec la prop et l'autre différemment
- Prop : si K = C u a une droite stable, si K = R u a une droite ou un plan stable. (OA) → Après Cayley Hamilton ?
- Prop : si u ∘ v = v ∘ u alors Kerv et Imv stables par u.
- Prop : u laisse stable tous les sev stricts de E ⇔ u homothétie + app centre de GL(E) c'est les homothéties

▼ I. 2. Endo induits et base adapté

- prop: si F est u-stable alors u induit deux endormorphismes (OA) dt le premier appelé endo induit
- rq attention pas confondre induit et restriction
- base adaptée et matrice + réciproquement triang par blocs ⇒des SES.
- Rq : bout de matrice= 0 ⇒2 SES supplémentaires.
- Rq : Si ¯u = 0 et u|F = 0, on peut avoir u != 0 (OA)
- (prop polynôme minimal de l'induit divise celui du gros, pareil caractéristique)

▼ I. 3. Dualité et SES

→ Gourdon p 134

- Déf : orthogonal. Déf : tu.
- Prop : F stable par u ⇔ F ⊥ stable par tu.

→ Gourdon p 268 / Griffone def adjoint

- si E euclidien ou hermitien: définition orthogonale + rq équivalence par Riesz
- F stable par u ⇔ F ⊥ stable par u*.

▼ II. 1. Lemme des noyaux

→ Rombaldi

- lemme des noyaux + application avec le polynôme caractéristique + appellation sous espaces caractéristique + rq ils sont stables par u

→ Carnet voyage algébrie

- application du lemme des noyaux: décomposition de Fitting énoncé avec somme orthogonale Ker u^m et Im u^m + énoncé avec les matrices + dnbrmt matrices nilpotentes DEV 1

▼ II. 2. (Co)-diagonalisation

→ Mansuy

- def diagonalisables
- équivalences diago (bien insister sur les résultats sur les sous espaces stables)
- diagob + nilpotent = nul
- u induit diagonalisable
- co-diagonalisable: propriétés
- application: unicité de la racine carré / injecticité de l'exp de Sn→ Sn++

▼ II. 3. Décomposition de Dunford

→ Gourdon p 236

- Dunford pour les semi-simples ref ?
- c-ex quand commute pas
- rq: version plus simple
- App : Calcul de l'exp. ex ?
- App : u diagb
⇔ exp(u) diagb
- (garder en tête Dunford Semi simples)
- App: critère de Routh ou lemme de décroissance exponentielle

▼ III. Endomorphismes normaux

- définition endo normal

- propriétés de stabilités quand normal
- dev: réduction des endo normaux hermitien/euclidien
- applications à tous les exemples

▼ IV. Cycliques et réduction de Frobenius et de Jordan

→ Mansuy

- def Ex = Vect u^i(x) comme le plus petit sous espace stable par u contenant x
- u est cyclique si existe x tq E = Ex
- ex dans Mansuy (endo qui n vp distinctes est cyclique)
- caractérisation cyclique ssi dim polynôme minimal est dim de E
- représentation matricielle: matrice compagnon

° Réduction de Frobenius (Mansuy)

- il existe x tqt pi u,x = pi u
- théorème (version matricielle à garder en tête)
- deux endo st semblables ssi même Pi, c'est pq sont appelés invariants de similitude
- ex + rq pour trouver invariant: forme normale de Smith de XIn-U

° Réduction de Jordan

- def blocs de Jordan
- Jordan nilpotent ou général poly scindé
- application ?

- leçon Pierre Beuchot: si K un corps sur lequel poly irred sont tous de degr inférieur ou égal à r alors u admet un sous espace stable non trivial de dimension inférieur à r ET sur Q il y a des endomorphismes sans sous espace stable non trivial
- si trop long Jordan dégage, Dunford peut aller seul dans partie 2
- lemme des noyaux: suites récurrentes à regarder ?
- semi simple avec Dunford