219 - Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.

Références	[MODE_Proba], [GOU_ANA], [Amrani_Fourier], [PGCD]
Section	Analyse
Date	@25 mars 2025
Statut leçon	Plan détaillé ok REF !
Enseignant	Isabelle Gruais
Développements choisis	Théorème des extrema liés , Méthode de gradient à pas optimal
Nb choisis	2
Autres développements à case comme item	Compacité faible et optimisation Hilbert
Développements	Méthode de gradient à pas optimal, Compacité faible et optimisation Hilbert, Théorème des extrema liés

Rapport de Jury

Cette leçon ore aux candidates et candidats une multitude d'approches possibles : utilisation de la topologie, du calcul diérentiel, de la convexité (fonctions convexes, projection sur un convexe fermé et leurs multiples applications), de l'holomorphie.
Les candidates et candidats peuvent proposer des problèmes d'optimisation sous contraintes, si possible autres que la preuve de l'inégalité arithmético-géométrique. À ce sujet, une bonne compréhension de la méthode des multiplicateurs de Lagrange requiert celle de la notion d'espace tangent, qui en donne une justification beaucoup plus claire que certains raisonnements purement matriciels.
Les algorithmes de recherche d'extremums ont également leur place dans cette leçon (méthode de Newton, du gradient à pas optimal, problème des moindres carrés, etc).
Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser aux diverses versions du principe du maximum (fonctions holomorphes ou harmoniques, équations aux dérivées partielles), au calcul des variations, ou réfléchir à l'unicité de la meilleure approximation dans divers espaces fonctionnels, à commencer par celle des fonctions continues sur un segment par des polynômes de degré au plus égal à d.

Introduction

→ optimiser: problème important de la vie courante

→ minimiser le temps de trajet, le coût, la pauvreté

→ maximiser: max de vraisemblance → sert en probas pour trouver de bosn estimateurs,

→ les meilleurs bornes possibles

II. Que vérifient les extrema ?

III. Et grâce à la convexité ?

IV. Qu’en est-il de la distance à un espace ?

Plans

▼ ***Plan***

I. Compacité: existence

II. Que vérifient les extrema ?

1. Condition du 1er ordre et du 2nd ordre dans R
2. Condition du 1er ordre et du 2nd ordre dans Rn
3. Et pour des extrema liés

III. Convexité

IV. Distance à un sous-espace

▼ ***Plan détaillé***

▼ I. Compacité: existence

Reprendre partie lecon compacite

▼ II. 1. Condition du 1er et second ordre: dans R

° 1er ordre

- si extremum alors point critique
- c-ex x^3
- ex: maximum vraisemblance (R)

1. Projection sur un sev de dim finie

    ° Matrice de Gram

2. Projection sur un convexe fermé

V. Fonctions holomorphes

- algo de Newton + (équivalent)

° 2nd ordre

- Selon signe derivee
- File ex max de vraisemblance

▼ II. 2. Condition du 1er et second ordre: dans Rd

° 1er ordre

- Généralisation
- Ex avec Matrice
- ex maximum de vraisemblance (Gaussienne)

° 2nd ordre

- Selon signe Hessienne
- Ex où besoin réduction de Gauss

▼ II. 3. Et pour des extremas liés

- énoncé extremas liés
- exemple basique
- app: inégalité Hölder, Hadamard
- app: minimisation fcontion sous contrainte (poly Karine, x^4+y^4=1 un truc du genre)

▼ III. Fonctions convexes

- Def (strictement) dans R et Rd
- Rq convexe/concave

° existence

- Convexe et coercive > existence
- C ex Exponentielle

° Unicite

- Strictement convexe ⇒ unicité
- Cex: constante à un moment

° Prop avec differentielles

- Si point critique alors maximum car hessienne positive
- ...

attention A l'ordre des items

▼ IV.1. Projection sur un sev de dim finie

- théorème avec distance atteinte et caractérisation du projecteur. INF = MIN

° Matrice de Gram

- def
- prop avec distance = quotient de dets de Gram
- app au calcul d'une intégrale
- inégalité de Hadamard

▼ IV.2. Projection sur un convexe fermé

- théorème [oral: utilise fermé pour existence et convexité pour unicité] INF = MIN
- app: espérance conditionnelle
- app: Minimisation sur un Hilbert (garder en tête Banach Alaoglu sans l'écrire)

▼ V. Fonctions holomorphes

- cadre nécessaire,, connexe...
- principe du maximum
- app: principe des 3 droites