

150 - Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

➤ Références	[Mansuy.] , [GOU AGP] , [Carnet voyage algèbrie] , [M2M]
📁 Section	Algèbre
📅 Date	@29 janvier 2025
☰ Statut leçon	Plan détaillé ok REF !
≡ Enseignant	Lionel Fourquaux
➤ Développements choisis	Image de l'exponentielle , Réduction des endomorphismes normaux - eucliden
🔍 Nb choisis	2
➤ Autres développements à case comme item	Lemme de Fitting et dénombrement des matrices nilpotentes sur F_q , Décomposition de Dunford , Matrice circulante et polygones réguliers
➤ Développements	Matrice circulante et polygones réguliers , Image de l'exponentielle , Réduction des endomorphismes normaux - eucliden , Lemme de Fitting et dénombrement des matrices nilpotentes sur F_q

Rapport de Jury

Cette leçon ne doit pas être un catalogue de résultats autour de la réduction ; les polynômes d'endomorphismes doivent y occuper une place importante. Il faut consacrer une courte partie de la leçon à l'algèbre $K[u]$, en particulier en connaître la dimension, et aux liens entre réduction de l'endomorphisme u et structure de l'algèbre $K[u]$. Il est ensuite possible de s'intéresser aux propriétés globales de cette algèbre (inversibles, condition nécessaire et suffisante assurant que ce soit un corps...). De même, il est important de mettre en évidence les liens entre les idempotents et la décomposition en somme de sous-espaces caractéristiques.

Le lemme des noyaux, les polynômes caractéristiques et minimaux doivent figurer dans la leçon. Il faut bien préciser que, dans la réduction de Dunford, les composantes sont des polynômes en l'endomorphisme, et en connaître des conséquences théoriques et pratiques. On attend que la candidate ou le candidat soit en mesure, pour une matrice simple de justifier la diagonalisabilité et de déterminer un polynôme annulateur (voire minimal).

L'aspect applications est trop souvent négligé. Il est par exemple possible d'envisager des applications au calcul de A^k à l'aide d'un polynôme annulateur, aux calculs d'exponentielles de matrices ou de mener l'analyse spectrale de matrices stochastiques.

Introduction

→ réduction: avoir accès à un représentant simple de l'endomorphisme que l'on veut étudier

Plans

▼ Plan

Cadre:

K corps, E un K ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. et u un endo de E

I. Polynômes d'endomorphisme

1. L'algèbre $K[u]$
2. Polynôme minimal
3. Polynôme caractéristique
4. Exponentielle de matrice

II. Réduction

1. Diagonalisation
2. Trigonalisation
3. Normaux
4. Jordan
5. Frobenius

▼ Plan détaillé

▼ I.1. L'algèbre $K[u]$

- Def $P(u)$ et de $K[u]$ + $K[u]$ est une algèbre commutative
- $\varphi_u: K[X] \rightarrow \text{End}(E)$, $P \rightarrow P(u)$ est un morphisme d'algèbre dont l'image est $K[u]$
- Lien avec les matrices: Si A matrice de u dans une base, $P(A)$ est la matrice de $P(u)$ dans cette base.

▼ I. 2. Polynôme minimal

- Il existe P tel que $P(u)=0$
- le noyau de φ est un idéal de $K[X]$. Donc généré par un unique polynôme minimal donc μ_u .
- $\dim(K[u]) = \deg(\mu_u)$ + Exemple (symétrie, projecteur)
- $K[u]$ est un corps ssi $K[u]$ est intègre ssi μ_u est irréductible
- Si F se de E stable par $\mu_u|_F$ | μ_u

▼ I. 3. Polynôme caractéristique

- Def polynôme caractéristique d'un endomorphisme + d'une matrice + exemple dans $M_2(\mathbb{C})$
- Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique
- si F se de E stable par $\chi_u|_F$ | χ_u
- Hamilton Cayley

▼ I.4. Exponentielle de Matrice

- Def exponentielle d'end et de matrice
- Image de l'exponentielle + Corollaire DEV 1
- App en EDO + exemple

▼ II. 1. Diagonalisation

- Equivalence + exemple
- Lemme des noyaux + app lemme de Fitting + Décomposition de Dunford + remarque résolution d'un système de congruence + exemple
- Def codiagonalisabilité + thm de codiagonalisabilité ??? + exo d'arthur?
- App calcul de puissance, de matrice

▼ II. 2. Trigonalisation

- Def + si polynome scindé alors tz + sur un corps algébriquement clos, tous sont tz.

▼ II. 3. Cas des endo normaux

- Def endomorphisme normaux
- Thm de réduction des endomorphismes normaux DEV 2

▼ II.4. Décomposition de Jordan

- Def bloc de jordan nilpotent + def bloc de jordan gal
- Thm de réduction de jordan

▼ II.5. Décomposition de Frobenius

- Lemme il existe $x \in E$ tq $\mu_u = \mu_{u,x}$.
- Def matrice compagnon
- Def u cyclique + Prop si u cyclique la matrice de u dans une certaine base de F est C_{μ_u}
- Thm de Frobenius + forme matricielle + Deux matrices sont semblables ssi même invariants de similitude
- Rq: Lien entre Frobenius et Jordan
- Commutant, bicommutant????

