

149 - Déterminant. Exemples et applications.

➤ Références	[GOU_AGP], [Allaire], [UlmA], [Griff], [Obj_pas_chômage], [Berthelin]
📁 Section	Algèbre
📅 Date	@12 novembre 2024
☰ Statut leçon	Plan détaillé ok
☰ Enseignant	Mathieu Romagny
➤ Développements choisis	<u>Matrice de Gram + Hadamard</u> , <u>Irred déterminant et hyperplan matrices</u>
🔍 Nb choisis	2
➤ Autres développements à case comme item	<u>Matrice circulante et polygones réguliers</u>
➤ Développements	<u>Matrice circulante et polygones réguliers</u> , <u>Matrice de Gram + Hadamard</u> , <u>Théorème des extrema liés</u>

Rapport de Jury

- définition correctes et prop fondamentales (espace engendré par formes n linéaires alternées sur un espace de dim n est de dim 1)
- distinction det famille de vecteur et endo
- interpretation en terme de volume
- calcul explicite important
- opération élémentaire présentées et illustrées
- applications: polynôme caractéristique, Gram pour distance, jacobien: analyse et proba, géométrie (coord barycentrique, colinéarité), formes quadratiques
- continuité du det ⇒ Application nécessaire, de même pour différentielle

Introduction

- condition de colinéarité
- critère d'inversibilité
- + d'autre app: géométrie...

Plans

▼ Plan

- I. Définitions du déterminant
 1. Des formes multilinéaires au déterminant d'une famille de vecteur
 2. Déterminant d'un endomorphisme
 3. Déterminant d'une matrice
- II. Calcul de déterminant
 1. Développement par ligne et colonne
 2. Matrices triangulaires
- III. Applications en algèbre et géométrie
 1. Géométrie
 2. Résolution de systèmes linéaires
 3. Algèbre linéaire
 4. Résultant
- IV. En analyse et en proba
 1. Topologie
 2. Equa diff

▼ Plan détaillé

- I/II Gourdon (aucunes démos)
- ▼ I.1. Des formes multilinéaires au déterminant d'une famille de vecteurs
 - Gourdon (aucunes démos)
 - définition forme p linéaire
 - définition alternée et notation grand lambda pour formes n linéaires alternées
 - cet ensemble sur un E ev de dimension n est de dimension 1 + unicité d'une forme dans cet espace qui vaut 1 sur une base donnée de E
 - définition du déterminant d'une base B avec formule avec les permutations
 - rq pour tout f dans cet espace lien $f(x_1, \dots, x_n)$ et $f(e_1, \dots, e_n) \cdot \det(B)$ (rq 2 p 135 gourdon) + rq changement de base ? j pense ça peut dégager
 - équivalence famille liée, pour tout base det nul, existe base det nul (A dire: ne depend pas de la base choisie)
 - ▼ I. 2. Déterminant d'un endomorphisme
 - def/ prop 5 Gourdon
 - ex homothétie
 - det de la composée

3. Changement de variables

▼ I. 3. Déterminant d'une matrice

- déterminant de A = déte des vecteurs qui forment les colonnes
- notation si on veut dans l'exemple+ ex 2*2 et 3*3 (Sarrus en annexe)
- prop: transposée, + si A matrice de f, alors det égal + det du produit + lambda → lambda**n
- coro: si P inversible alors det inversible et det P-1 = det(P)^-1 + invariant de similitude

▼ II. 1. Développement par ligne et colonnes

- def mineur + cofacteur + comatrice
- devlpt lignes/colonnes + ex Vandermonde et Cauchy + application multilinéarité
- formule de la comatrice +app 2*2
- critère inversibilité + réciproque si det inversible alors A inversible
- dev 1: irréductibilité + app hyperplan

▼ II. 2. Matrices triangulaires

- det d'une matrice triangulaire par blocs
- méthode: pivot de gauss
- ex ?

▼ III. 1 Géométrie

→ Objectif agreg

° Interprétation en terme de volume

- facteur de dilatation de volume + appli: volume parallélogramme + illustration annexe

° Utilisation pour le calcul de distance

→ Gourdon environ p 260

- matrice de Gram: définition matrice de Gram / déterminant
- prop: une matrice est de Gram ssi symétrique positive
- prop: définie positive (ie G non nul) ssi famille libre
- théorème avec la distance DEV 1
- application Hadamard (ref ???) DEV 1
- application calcul d'intégrale exo 6 Gourdon

▼ III.2. Résolution de systèmes linéaires

→ Griffone, Allaire,

- méthode de Cramer
- rq utilité en pratique nulle mais application théorique cool
- barycentre (Audin)
- app: matrice de Gram

▼ III.3. Algèbre linéaire

→ ref ?

- polynôme caractéristique + lambda valeur propre ssi racine du polynôme caract
- app: matrices circulantes
- suites de polygones

▼ III.4. Résultant

→ Ref Ulmer il y a des trucs, Rombaldi aussi

- matrice de Sylvester + appelle résultant son déterminant + notation
- prop: $\text{res}(P,Q)=0$ ssi P et Q ont un facteur commun
- ex P et P' cf Manon
- théorie de l'élimination
- app: résolution des systèmes polynomiaux

▼ IV.1. Topologie

→ Ref ?

- $A \rightarrow \det(A)$ est continue
- app: GL_n ouvert dense, SL_n fermé de GL_n , On n'est pas connexe

▼ IV.2. Equa diff

→ ref ? Des pistes où il y a des trucs écrits: équations différentielles ordinaires avec applications, Attili et Cheaytou ou équations différentielles, Berthelin

- différentielle du déterminant (ça sert vraiment ?)
- app: wronskien: définition comme le det des solutions+ vérifie l'EDO avec la trace+ app: montrer que système fondamental de solution + rq peut dans certains cas permettre de trouver des solutions

▼ IV.3. Changement de variables

→ ref ???

- théo du changement de variable
- intégrale de gauss et changement polaire
- ex en proba ?