215 - Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications

➤ Références	[GOU_ANA], [Obj_pas_chômage], [PGCD], [Berthelin], [40dev-ANA], [Statsaction]
📁 Section	Analyse
📅 Date	@16 octobre 2024
☰ Statut leçon	Plan détaillé ok
☰ Enseignant	Miguel Rodrigues
➤ Développement choisis	<u>Théorème des extrema liés</u> , <u>Lemme de Morse</u>
🔍 Nb choisis	2
➤ Autres développements à case comme item	<u>Lyapounov</u> , <u>Méthode de gradient à pas optimal</u>
➤ Développements	<u>Lemme de Morse</u> , <u>Théorème des extrema liés</u>

Rapport de Jury

- idée de départ: fonction suffisamment régulière se comporte comme fonction linéaire
- ex significatifs en dim 2 et 3 pour illustrer diff avec dim 1
- dérivées partielles et règle de la chaîne
- holo et interprétation géométrique (conforme)

Introduction

→ approcher par fonction linéaire localement

→ généralisation de la dérivée et tout ce que ça implique (caractérisation)

"La notion de fonction différentiable est la généralisation aux fonctions de plusieurs variables de la notion de fonction dérivable d'une variable réelle. Bien sûr, on ne peut pas transposer directement la définition utilisant le taux d'accroissement (impossible de diviser par un vecteur!). C'est la caractérisation de la dérivabilité en terme d'existence de développement limité d'ordre 1 qui se généralise en dimension quelconque"

Plans

▼ Plan

I. Différentiabilité

1. Définition
2. Dérivées partielles
3. Différentielles d'ordre supérieures

II. Théorèmes pour les fonctions différentiables

1. Théorèmes des accroissements finis - Formules de Taylor
2. Théorèmes d'inversions

III. Optimisation (dans $\mathbb{R}$ du coup)

1. Différentielles et extrema, cas sans contraintes
2. Caractérisation de la convexité et optimisation de fonctions convexes
3. Méthodes de gradient
4. Conditions d'optimalité sous contraintes

Annexe: shema de Karine

▼ Plan détaillé

▼ I.1. Définition

- différentiable en un point + sur ouvert U + si sa différentielle continue alors C^1
- rq analogie avec $\mathbb{R}$, dérivable equi diff
- différentiable $\Rightarrow$ continue + cex (ou rq cf annexe)
- (def gradient (cas où on va dans $\mathbb{R}$) "il existe un unique vecteur" +)
- ex: linéaire, identité, inverse, bilinéaire ?
- somme + linéaire diff est diff
- théo fct composé + application différentielle de l'inverse + rq on peut remplacer l'hyp f^{-1} diff par $df(a)$ bijection (théo 14 Karine) + ex fct auxiliaire (pt 2 Karine)
- (rq fct aux: permet de montrer des prop sur une fonction de plus variables f en se ramenant à une fct de la varibale réelle t)

▼ I. 2. Dérivées partielles

- dérivé selon un vecteur + différentiable $\Rightarrow$ dérivable selon tout vecteur + réciproque fausse (contre ex y^2/x Gourdon)
- dérivée partielle + diff $\Rightarrow$ dérivé selon tout vecteur $\Rightarrow$ dérivée partielle par rapport + formule de la somme (+ réciproque fausse (xy/x^2+y^2 en 0 non continue Rouvière) mais par contre + équivalence $f \in C^1$ et diff partielles existent et sont continues + règle de la chaîne
- exemple de l'holomorphie F holo ssi f diff et CR

- jacobienne + ex calcul jacobienne + changement de variable (rq sur gradient avec dérivées partielles si pas déjà faite)
- Lyapounov
- delta méthode
- ▼ I. 3. Différentielles d'ordre supérieure
 - Cas $k=2$, dérivées partielles + shwarz + diff d'ordre 2 + ex du déterminant + prop semblable cas 1 + contre ex
 - hessienne quand va dans $\mathbb{R}$
 - Rq s'étend de la même manière au cas quelconque
- ▼ II. 1. Théorèmes des accroissements finis-formules de Taylor
 - énoncé accroissements finis + prop si ouvert connexe f cst ssi $df(x)=0$ (Gourdon)
 - (si suites / séries de trucs différentiables c'est le moment)
 - (taylor young + taylor restes intégrales (à l'oral application lemme Morse))
- ▼ II. 2. Théorèmes d'inversion
 - PGCD, Gourdon
 - TIL
 - Morse
 - def gradient (cas où on va dans $\mathbb{R}$) "il existe un unique vecteur" +
 - TFI + ex ludique ? place ?
- ▼ III. 1. Cas général
 - conditions générales
 - application de Morse avec plan tangent
- ▼ III.2. Convexité
 - caractérisation fct convexe
 - optimisation de fonction convexes
- ▼ III.3. Si pas le temps place/parle méthode gradient, rajoute en rq dans partie 2
 - gradient pas fixe /optimal dessin
- ▼ III.4 Sous contraintes
 - DEV 2 extremas liés et applications (inégalités, théo spectral (Obj pas chômage))

être conscient que a pas parlé des suites d'applications différentiables $\Rightarrow$ différentielle déterminant