

# 144 - Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Exemples et applications.

↗ Références	[Gozard], [GOU ANA], [Perrin]
📁 Section	Algèbre
📅 Date	@12 février 2025
☰ Statut leçon	Plan détaillé ok
☰ Enseignant	David Bourqui
↗ Développements choisis	<a href="#">Irréductibilité des polynômes cyclotomiques sur Q</a> , <a href="#">Chevalley Warning et EGZ</a>
🔍 Nb choisis	2
↗ Développements	<a href="#">Irréductibilité des polynômes cyclotomiques sur Q</a> , <a href="#">Chevalley Warning et EGZ</a>

## Rapport de Jury

### Introduction

Recherche des racines d'un polynômes: résolution d'équations

Plus d'autres domaines: réduction, valeur propre...

Faire le lien entre les racines et les fonctions symétriques élémentaires (relation coefficients racines)

### Plans

#### ▼ Plan

- I. Racines d'un polynômes
  - 1. Racines d'un polynôme
  - 2. Détermination des racines
  - 3. Réduction
  - 4. Localisation des racines
  - 5. Racines de l'unité
  - 6. Résultant
- II. Adjonction de racines et corps [PER,GOZ]
  - 1. Corps de rupture
  - 2. Corps de décomposition
  - 3. Corps finis
  - 4. Corps algébrique
- III. Fonctions symétriques élémentaires

#### ▼ Plan détaillé

- ▼ I.1. Racines d'un polynômes
  - Def  $f(x) = ex + racines$  ssi  $X-a \mid P$
  - Def racine d'ordre  $k$  ssi  $(X-a)^k \mid P$  et  $(X-a)^{k+1} \nmid P$  + cex en caractéristique non nul
  - Prop de degré  $n \Rightarrow$  au plus  $n$  racines + ex faux dans un anneau quelconque + app: nbr fini de Racine  $C[A]^x$  connexe
  - Bijection entre  $K[X]$  et fct polynome si  $K$  infini + Cor iso entre  $K^n$  et  $K[x]_{n-1}$
  - Def polynome scindé (cf rapport) + thm de d'alembert Gauss
  - Si  $k$  fini, polynome peut etre non nul mais s'annuler sur  $K$
  - Si  $k$  infini,  $P \in k[X_1, \dots, X_n]$  qui s'annule sur  $K^n$  est le polynome nul + cpdt il peu avoir un nombre infini de zéros sans être nul + ex  $X^2$
  - Def irréductibilité ... + Pol irréductible de  $C$  et  $R$
- ▼ I. 2. Détermination des racines
  - Détermination des racines (pour les petits  $n = 2,3$ )
- ▼ I. 3. Réduction
  - Spectre = racines du polynome caractéristique
  - conséquences en réduction: polynome caractéristique scindé  $\Rightarrow$   $tz$ , dans un corps algébriquement clos, tous  $tz$  + trace et déterminant, polynome annulateur SARS
  - exemple/application: determinant de la matrice circulante + polygone
  - Disque de Gershgorin
- ▼ I. 4. Localisation des racines [Nourdin]
  - Méthode de Newton
  - Gauss lucas
- ▼ I.5. Racines de l'unité

- Déf racines de l'unité + primitives n e de l'unité
  - Exemple des premiers polynômes cyclotomiques
  - lemme  $X^n - 1 = \prod \phi_n$
  - $\phi_n$  est unitaire à coefficients entiers + irréductibilité des polynômes cyclotomiques sur  $\mathbb{Q}$  (sur  $\mathbb{F}_q$ ???)
  - constructibilité ?
- ▼ (I. 6. Résultant)
- Def + thm + exemple
- ▼ II. 1. Corps de rupture
- Def + ex pour les polynômes de degré 1 + rq Dans cette construction le monôme  $X$  devient une racine de  $P$
  - Thm existence et unicité du cors de rupture + ex  $X^2+1$  sur  $\mathbb{R}$   $X^2+X+1$  dans  $\mathbb{F}_2$
  - Prop  $P$  irréductible ssi il n'a pas de racines dans les ext de degré  $\leq n/2$
- ▼ II.2. Corps de décomposition
- DEF + thm d'existence et unicité + ex
  - dans un corps de décomposition,  $u$  tz
- ▼ II.3. Corps finis
- Construction des corps finis
  - App: thm de Wilson (cor de  $\mathbb{F}_p =$  racines de  $X^p - X$  plus particulièrement de  $X^{p-1} - 1 = 0$ )
  - dev: chevalley warning
- ▼ II.4. Corps algébrique
- Définition élément algébrique
  - définition extension algébrique
  - def algebriquement clos + tt corps algébriquement clos est infini + ex  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{Q}$  ne le sont pas (D'Alembert Gauss? pas déjà mis)
  - def CLoture algébrique  $C$  est la cloture algébrique de  $\mathbb{R}$ ,  $\bar{\mathbb{Q}}$  celle de  $\mathbb{Q}$  +
  - prop sur  $M$  ensemble des éléments algébrique de  $L/K$  algébrique est une cloture algébrique de  $K$
- ▼ III. Fct sym élémentaires
- DEF polynômes symétriques + def polynôme symétrique elmtr
  - Thm de structure + algortihme du thm de structure + exemple
  - Application classique: il existe un polynôme en les racines dans  $K$  en dehors de la cloture algébrique
  - Relation coefficients racines + exemple
  - $GL_n(\mathbb{Z})$ : nombre d'ordre possible pour matrices d'ordre fini
  - Formules de Newton
  - Thm de Kronecker + Corollaire [FGNa1]

- continuité racines?