214 - Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Illustrations en analyse et en géométrie.

↗ Références	[PGCD], [Obj_pas_chômage], [GOU_ANA]
📄 Section	Analyse
📅 Date	@15 octobre 2024
☰ Statut leçon	Plan détaillé ok
☰ Enseignant	Bachir Bekka
↗ Développements choisis	<u>Théorème des extrema liés</u> , <u>Lemme de Morse</u>
🔍 Nb choisis	2
↗ Autres développements à case comme item	<u>Image de l'exponentielle</u>
↗ Développements	<u>Lemme de Morse</u> , <u>Théorème des extrema liés</u>

Rapport de Jury

- parler des applications
- visualisation avec espaces tangents
- mettre en pratique sur des exemples bien choisis le TFI
- applications significatives en analyse et géométrie
- méthode multiplicateurs de Lagrange

Introduction

- TIL: si $C1$ difféo alors df bijective donc TIL réciproque + généralisation du cas $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ où si $f'(x) \neq 0$ alors f $C1$ difféo
- TFI: écrire l'endroit où f s'annule sous forme de graphe, transformer une équation en graphe
- Sous variétés: mise en oeuvre de ces deux théorèmes

Plans

▼ Plan

- I. Théorème d'inversion locale
 1. Énoncé et généralisations
 2. Applications
- II. Théorème des fonctions implicites
 1. Énoncé
 2. Applications
- III. Sous variétés de $\mathbb{R}^n$
 1. Définitions
 2. Extrema liés

Annexe: -schema TIL (Rou), schema TFI (Rou), ex cercle et folium (Rou), schema def avec carte locale (Rou), schema app lemme morse (Rou)

▼ Plan détaillé

- ▼ I.1. Énoncé et généralisation
 - Gourdon mais pas optimal, Objectif agrégation
 - définition $C1$ difféomorphisme + Ck
 - énoncé TIL Banach + Ck :
 - remarque annexe + rq TIL dim finie
 - contre ex: - $C1$ nécessaire (Gourdon) - $DF(0)$ inversible nécessaire ex $x \rightarrow x^3$?? - contre exemple sans complétude (cf Karine)
 - rq/ex: conclusion que locale et pas globale (Gourdon/Rouvière)
 - théorème d'inversion Globale
 - rq injective et df inversible: pas équivalent (Gourdon)
 - (theo holomorphie) (Rou) A
- ▼ I. 2. Applications
 - ° en analyse
 - si jamais: des exemples de fonction $C1$ difféo (exp matrices..) + app
 - changement de coordonnées (Rouvière) + ex coord polaires + intégrale de Gauss $\Rightarrow$ PAS CONVAINCUE
 - ° sur des polynômes
 - D'Alembert Gauss
 - ° en algèbre et géométrie

- réduction des formes quadratique + lemme de morse DEV 1(Rouvière, p 354)
- rq app plus tard: position relative d'une courbe par rapport à son plan tangent
- (image exponentielle)

▼ II. 1. Énoncé

→ Objectif agreg

- énoncé + rq Ck (même régularité) + rq signification (courbe def par $f(x,y)=0$ peut localement etre vue comme graphe fct phi) (schema annexe)
- rq dimension finie
- rq on peut calculer la différentielle de phi
- rq schema en annexe
- ex cercle et folium de descartes (Rouvière/Karine) + schéma annexe
- rq Rouvière TIL equivaut TFI

▼ II. 2. Applications

° analyse

- ex DL (Gourdon ex 2 p 348)
- racines d'une équation ex 77 Rouvière

° polynôme (Objectif agrégation)

- racines d'un polynôme à coeff réels st fct C_{infi} des coeff au voisinage d'un poly à racines réelles et distinctes (aussi avec TFI mais sait pas comment faire)
- polynomes à racines simple → ouvert conséquence avec matrice diagonalisable

° Théorème des extrêmes liés sans parler de sous variétés

- DEV 2

▼ III. 1 Définition

- définition sous-varités + ex basique ouverts de R_n
- théo: définitions équivalentes
- plusieurs ex pour chaque def equi (Pierre, un peu dans le Rouvière mais pas les mêmes)
- vecteur / plan tangent (Rouvière mais bof)
- application lemme Morse + schema annexe (exo 111 Rou)
- caractérisations plan tangent ?

▼ III.2. Extrema liés

- Remarque retrouve extrêmes liés avec ces caractérisations
- inégalité Hadamard / arithmético géo / Hôlder
- application: démo théorème spectral (obj agreg)

(toute matrice à une matrice kieme si proche identité → Objectif agrégation)