213 - Espaces de Hilbert. Exemples et applications.

➤ Références	[Amrani_Fourier], [Obj_pas_chômage]
📁 Section	Analyse
📅 Date	@18 décembre 2024
☰ Statut leçon	Plan détaillé ok
☰ Enseignant	Bachir Bekka
➤ Développements choisis	Compacité faible et optimisation Hilbert, Projection sur un convexe fermé
🔍 Nb choisis	2
➤ Développements	Projection sur un convexe fermé, Compacité faible et optimisation Hilbert

Rapport de Jury

Introduction

→ structure très riche : complétude (montrer des CV sans exhiber des limites), hilbertien (géométrie en dim infinie), caractériser les formes linéaires (Riesz), bases hilbertiennes (généraliser la notion de bases en dim infinie).

Plans

▼ Plan

Cadre: $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

I. Espaces préhilbertiens/de Hilbert

1. Définitions
2. Orthogonalité

II. Théorème de projection et ses conséquences

1. Théo projection
2. TSO
3. Théorème de Riesz et conséquences

III. Bases hilbertiennes

1. Généralités
2. Base de Fourier
3. Polynômes orthogonaux

Annexe: dessin

▼ Plan détaillé

▼ I.1. Définitions

- Amrani
- forme hermitienne
- def espace préhilbertien: E munit de forme hermitienne définie positive
- Schartz
- Minkowki → défini une norme
- Parallélogramme
- préhilbertien: evn ssi vérifie identité parallélogramme
- Hilbert: def
- ex et contre ex de pré-hilbertien non Hilbert ($\mathbb{R}[X]$ à tester ?)
- tout ev préhilbertien de dim finie est un Hilbert (dim finie $\Rightarrow$ complet)

▼ I. 2. Orthogonalité

- (éléments ortjogonaux ?)
- Pythagore + rq réciproque vrai dans $\mathbb{R}$ mais fausse dans $\mathbb{C}$ (c-ex)
- orthogonal d'une partie + prop: sev fermé de E
- orthogonal de l'union / A inclu dans B : orthogonal change de sens
- A inclus dans A_{ortho}^{**2}

▼ II. 1. Théorème de projection

- En dimension finie
 - théo de projection en dimension finie (au moins à l'oral) + forme du projecteur + app Gram Schmidt
 - matrice de Gram et calcul de distance atteinte
- Dimension infinie
 - théo projection convexe fermé DEV 1
 - app: définition espérance conditionnelle
 - dessin annexe

- dessin pour montrer que convexe est nécessaire à l'unicité (ex du complémentaire du disque ouvert dans $\mathbb{R}^2$ ou double bosse)
 - projection est 1 lipschitzienne donc continue
 - (rq: on peut enlever hyp complétude sur H, et A partie complète → Garder en tête)
 - des contre ex
 - projection sur un sev
- ▼ II. 2. Théorème du supplémentaire orthogonal
- théorème supplémentaire orthogonal
 - critère de densité
 - on a biorthogonal = $\text{adh}(A)$ si E Hilbert
- ▼ II. 3. Théo de Riesz et conséquence
- énoncé
 - app: définition de l'adjoint
 - convergence faible
 - implication forte ⇒ faible ...
 - DEV 2: Anaoglu + app: optimisation
- ▼ III. 1 Généralités
- Cadre: E espace préhilbertien
- def famille totale + base hilbertienne
 - rq: différence base algébrique
 - ex pour l_2
 - Thm d'existence d'une base hilbertienne dénombrable pour les Hilbert séparables ; la caractérisation des bases hilbertiennes ; les Hilbert séparables sont isométriques à $l_2(\mathbb{N})$. (permet pas avoir de problème de sommabilité)
- ⇒ CADRE SEPARABLE POUR PAS AVOIR FAMILLE SOMMABLE...
- bessel
 - bessel parseval / ex et application
 - x est la somme des $(x, e_i)e_i$ où (e_i) BH
 - rq retrouve trucs de la dimension finie
 - $x \rightarrow ((x|e_i))_i$ est une isométrie linéaire
 - elle est surjective ssi E est un Hilbert
- ▼ III.2. Base hilbertienne de Fourier
- déf des e_n
 - orthonormale
 - déf des coefficients de Fourier, déf noyau de Fejér, formule pour σ_N , théorème de Fejér
 - approchable par les polynômes trigonométriques
 - csq: le système trigo est une base hilbertiennes de L^2
 - application à un calcul de somme ?
 - Application Shannon sans poisson DEV POSSIBLE
- ▼ III.2. Polynômes orthogonaux
- Objectif agreg ? P110/p140 exo 3.7
- fonction poids, espace L^2 à poids (Hilbert ? demo objectif agreg)

- th d'existence des polynômes orthogonaux + ex avec les différents poids
- (app polynômes de meilleur approximation ?)
- th : les polynômes orthogonaux forment une base hilbertienne

- pour juin peut être mettre Shannon sans poisson en dev
- attention famille sommable
- conséquence sur le fait que tout Hilbert de dimension infinie est séparable ssi il est isométrique à ℓ^2