209 - Approximation d'une fonction par des fonctions régulières. Exemples d'applications.

Références	[Amrani_Fourier], [ROM_ANA], [GOU_ANA], [Candelpergher], [Zully_queff]
Section	Analyse
Date	@17 décembre 2024
Statut leçon	Plan détaillé ok
Enseignant	Bachir Bekka
Développements choisis	Weierstrass / Bernstein par les probas , Densité Lp
Nb choisis	2
Développements	Weierstrass / Bernstein par les probas , Théorème de Lévy + TCL

Rapport de Jury

Introduction

- approcher pour étendre propriétés qu'on a sur les fonctions régulières
- polynômes
- → raisonnement 3 epsilon
- à l'instar des fonctions étagées dans les Lp

Plans

▼ ***Plan***

I. Approximation par des polynômes

1. Approximation locale de fonctions régulières
2. Densité dans les fonctions continues à support compact
3. Densité dans L2

II. Approximation par convolution

1. Convolution
2. Convolution et régularisation
3. Application aux proba

III. Approximation par des polynômes trigonométriques

1. Séries de fourier et poly trigo
2. Convergence au sens de Cesaro = Féjer
3. Convergence de la série de Fourier

▼ ***Plan détaillé***

▼ I.1. Approximation locale de fonctions régulières

- Taylor Lagrange
- app: inégalité (inégalité: quantifie écart entre f et sa série de Taylor)
- Taylor Young
- app: DL approximation (utile et simple)
- Taylor Reste intégral ? DSE ?

▼ I. 2. Densité des polynômes dans les fonctions continues à support compact

→ Zully et plein d'autre, Hirsh Lacombe ?

- lemme Dini ? Utile Stone Weierstrass
- Weierstrass DEV 1 en explicitant les polynômes
- application intégrale (PB moments)
- généralisation: Stone Weierstrass
- autre app: Stone Weierstrass

▼ I. 3. Densité des polynômes dans L2

→ Obejctif agreg plutôt (Amrani à la limite)

- fonction poids, espace L2 à poids
- th d'existence des polynômes orthogonaux + ex avec les différents poids
- th : les polynômes orthogonaux forment une base hilbertienne: densité d'où l'intérêt pour l'approximation

▼ II. 1. Convolution

- définition convolution
- différents couples qui marchent cf pas Tinder

- ▼ II.2. Régularisation
  - suites régularisantes
  - densité des Ccinfini dans Lp DEV 2
  - app: Riemann Lebesgue
  - résultats de densité de D(R^d) dans à la fois Lp et C°c (peut être besoin rajouter étapes intermédiaires p 330 Zully Queffelec)
- ▼ II.3. Application aux probas
  - def convergence en loi
  - équivalence autre truc de fonction
  - lévy
  - TCL

- ▼ III. 1 Séries de fourier et poly trigo
  - einx famille orthonormée
  - polynôme trigo, somme fini de einx
  - à quelle condition série trigo converge
  - coeff de fourier + prop dt Riemman Lebesgue
  - def série de Fourier
  - ex de série de Fourier
- ▼ III.2. Convergence au sens de Cesaro = Féjer

  → Amrani
  - def noyau Dirichlet + Féjer + les prop qu'on sait sur eux (cf la leçon correspondante) + rq Kn*f poly trigo
  - théo Féjer: Kn*f (qui est un polynôme trigo) converge Uniformément vers f vrai C° et Lp pour les deux normes
  - app : critères de Weyl
  - des corollaires ? ex les poly trigo sont denses dans (C°2pi) et (Lp) + truc si (Sn(f(x0)) CV alors CV vers f(X0) [Amrani]

- ▼ III.3. Convergence de la série de Fourier
  - Parseval (Sn(f) Cv vers f en moyenne de Cesaro)
  - C° et C1pm alors Sn(f) CVN sur R et f somme de sa série de Fourier
  - app : poisson shanon
  - c-ex (theo de Banach Steinhaus)
  - Thm de Dirichlet + ex de calcul de somme

- interpolation polynomiale à avoir conscience
- densité des fonctions étagées + rq/ app utile quand même mais pas régulier
- extension avec sans le c en bas pour la topo uniforme sur tout compact