208 - Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

➤ Références	[GOU_ANA], [Hirsch-Lacombe], [Hassan], [Amrani_Fourier], [Queff_TOPO]
📁 Section	Analyse
📅 Date	@23 octobre 2024
☰ Statut leçon	Plan détaillé ok
👤 Enseignant	Bachir Bekka
➤ Développement choisis	Banach-Steinhaus et app série Fourier, Riesz Fisher
🔍 Nb choisis	2
➤ Autres développements à case comme item	Théorème d'Ascoli, Projection sur un convexe fermé
➤ Développements	Banach-Steinhaus et app série Fourier

Rapport de Jury

- pas nécessaire longs rappels sur les normes
- exemples bien choisis, en particulier de normes équivalentes ou non, ou de calculs de normes subordonnées.
- idée dev: cas de la dimension finie, intervention de la complétude (en particulier le cas hilbertien), étude de la compacité de la boule unité fermée, lien entre continuité d'une forme linéaire (ou plus généralement, d'une application linéaire de rang ni) et fermeture du noyau...
- Pour les candidates et candidats solides, des prolongements possibles sont : les conséquences du théorème de Baire dans le cadre des espaces de Banach (tout particulièrement le théorème de Banach-Steinhaus et son utilisation pour construire des objets pathologiques), le théorème de Hahn-Banach et ses conséquences, la théorie de algèbres de Banach, la détermination de duals topologiques.

Introduction

- pq on introduit les normes ? (par ex pour caractériser facilement la continuité des appli linéaires)
- bons espaces
- encore mieux avec produit scalaire Hilbert

Plans

▼ Plan

- I. Espaces vectoriels normés
 1. Norme
 2. Applications linéaires continues
 3. Cas de la dimension finie
 - II. Espaces de Banach
 1. Définitions et propriétés
 2. Théorie de Baire et applications
 - III. Espaces de Hilbert
 1. Définition
 2. Projection sur un convexe fermé et conséquence
- Annexe: boule unité pour différentes normes + projection sur un convexe fermé

▼ Plan détaillé

- ▼ I.1. Normes
 - Gourdon
 - définition norme: application de E dans $\mathbb{R}^+$ tq séparation, homoénéité et inégalité triangulaire + evn
 - rq: norme induit une distance donc evn $\Rightarrow$ em
 - ex: norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$ + schema annexe + norme infinie pour fonctions continues sur un compact
 - prop: norme 1 lipshitzienne donc continue
 - app facile si nous vient en tête
 - prop: Hölder dans L_p + csq: $(L_p, \|\cdot\|_p)$ evn
 - def norme sous multiplicative + ex norme de Frobenius (ref ?)
 - def normes équivalentes + ex (Karine)
- ▼ I. 2. Applications linéaires continues
 - Gourdon, (Mais aussi truc agreg interne)
 - Cadre: E et F evn, f linéaire
 - condition équivalentes de continuité
 - ex T: continue $([0,1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, $f \rightarrow f(0)$ continue pour norme infinie mais pas norme 1

- rq: se généralise aux applications multilinéaires **ref ?**
- si f continue, defS norme subordonné
- ex: des matrices avec Norme 1,2, infini et un autre exemple ?
(attention si besoin sous multiplicativité)
- norme subordonné $\Rightarrow$ sous multiplicatif + contre ex: norme de Frobenius citée avant **ref**
- prop: $Lc(E,F)$ est un evn avec norme subordonnée et même algèbre (sous multiplicatif)
- $\ker f$ fermé de E ssi f forme linéaire sur E est continue + app/ex ?

▼ I. 3. Cas de la dimension finie

- Sur un $\mathbb{R}$ evn, de dim finie toutes les normes sont équivalentes + contre ex: les normes dans l'ex du T avant **ref ?**
- rq: sur $\mathbb{C}$ aussi vraie
- rq: réciproque vraie
- csq: compacts sont les fermés bornés + c-ex $\mathbb{R}[X]$ cf compacité
- csq: dans un evn tout sev de dimension finie est fermé
- csq: toute application linéaire est continue + contre ex $P \rightarrow P'$
- Riesz + contre ex en dimension infinie ? cf compacité pour cette partie

▼ II. 1. Définitions et propriétés

$\rightarrow$ **REF ?**

- def espace complet
- def espace de Banach attention pour la norme + ex $C^b(E,F)$, norme infinie Banach

* Séries CVA $\rightarrow$ CV

- Banach ssi toute série blablilbla
- app: - Riesz Fischer DEV 1
- F Banach alors $Lc(E,F)$ Banach
- ex : le dual est un Banach
- appli: inverse avec la somme (attention besoin Banach pour CVA $\Rightarrow$ CV) si de norme plus petit que 1 alors $(Id-u)$ inversible

(*Inverses

- prop: Si t'es dans algèbre de Banach (algèbre + Banach) alors $Inv(X)$ ouvert de X + ex ens des endo inversible continues d'inverse continus est un ouvert de $Lc(E)$)

*points fixes

- théorème point fixe + 1 contre ex sans complétude
- app: Cauchy Lipschitz global

▼ II. 2. Théorie de Baire et applications

$\rightarrow$ Gourdon dans l'annexe

- théo de Baire
- app directe: evn avec base dénombrable non finie n'est pas complet
- Banach steinhaus + coro CVS + séries de Fourier DEV 2
- théorème application ouverte
- csq Théorème isomorphisme de Banach + csq $F: f$ de $L^1 \rightarrow$ coeffs de Fourier n'est pas surjective

▼ III. 1 Définition

→ Hirsh Lacombe

- espace préhilbertien, fournit une norme
- cauchy-schwarz
- un evn est un eph ssi vérifie il vérifie l'identité du parallélogramme ref
? Comment faire ? peut être même idée forme polaire
- def espace de Hilbert + ex $L^2, \mathbb{R}^n$.

▼ III.2. Projection sur un convexe fermé et conséquence

- théorème de projection sur un convexe fermé + annexe
- appl: def espérance conditionnelle
- un contre ex si veut
- théorème du supplémentaire orthogonal
- app critère de densité
- app: théorème de Riesz
- application ? définition de l'adjoint

- contre ex dim infinie: l_p et l_q , norme p et q pas équivalentes sur l_q
- contre ex de Baire sans complétude dans Karine