

# 125 - Extensions de corps. Exemples et applications.

➤ Références	[Gozard], [Perrin]
📁 Section	Algèbre
📅 Date	@30 avril 2025
☰ Statut leçon	Plan détaillé ok
☰ Enseignant	David Bourqui
➤ Développement choisis	<a href="#">Algorithme de Berlekamp</a> , <a href="#">Polygones constructibles</a> , <a href="#">Corps des nombres algébriques</a>
🔍 Nb choisis	3
➤ Autres développements à case comme item	<a href="#">Irréductibilité des polynômes cyclotomiques sur <math>\mathbb{Q}</math></a>
➤ Développements	<a href="#">Polygones constructibles</a> , <a href="#">Algorithme de Berlekamp</a>

## Rapport de Jury

- théorème de la base télescopique et ses applications à l'irréductibilité de certains polynômes,
- les corps finis

## Introduction

→ cool les racines, corps plus gros pour avoir poly

→ (regarder Gozard)

## Plans

### ▼ Plan

#### I. Généralités

1. Extension de corps
2. Extension algébrique

#### II. Adjonction de racines

1. Clôture algébrique
2. Corps de rupture
3. Corps de décomposition
4. Application: corps finis

#### III. Cyclotomie et nombres/poly constructibles

1. Cyclotomie bases
2. Nombres constructibles
3. Polygones réguliers

### Annexe

### ▼ Plan détaillé

#### ▼ I.1. Extension de corps

- def extension de corps
- ex de  $\mathbb{R}$  pour  $\mathbb{Q}$
- $r \mid q$  ev + def degré
- ex dépend du morphisme
- théo base télescopique + prop irréductibilité des polynômes grâce à ça  $\text{pgcd}(n,m) + ex ?$

#### ▼ I. 2. Extension algébrique

- def algébrique / transcendant
- poly minimal + prop: irréductible
- + app polynôme cyclotomiques (poly mini des racines de l'unité)

- def extension algébrique
  - prop finie  $\Rightarrow$  algébrique
  - équivalences élément alg, deg de  $K[\alpha]$  ... DEV1 + app : corps des nb alg
  - ex/app ?
- ▼ II. 1. Clôture algébrique (attention voir si besoin de plus sinon swith et mets petit 4)
- Gozard
- def algébriquement clos
  - prop : tout corps alg clos est infini
  - th : C alg clos (D'Alembert-Gauss)
- ▼ II.2. Corps de rupture
- def Jérem
  - def équivalente :  $K[\text{racine}]$
  - (isomorphe selon quelle racine on choisit, d'où vient ?)
  - existence et unicité à iso  $K$ -linéaire près quand pol irred (**et quand pol pas irred??**)
  - application : construction de C comme corps de rupture de  $X^2+1$
- ▼ II.3. Corps de décomposition
- app principale corps fini, partie après
- def Jerem (et Perrin)
  - def équivalente [Gozard]
  - exemple ? C aussi corps de décomposition
  - existence et unicité à iso  $K$ -linéaire près
  - app en algèbre : dans le corps de décomposition du polynôme minimal d'un endomorphisme, cet endo est trigonalisable
- ▼ II.4. Corps fini
- def + existence et unicité grâce corps de décomposition
  - exemple
  - théorème de l'élément primitif + app injection  $F_p$  + app: existence de polynôme irred de tout degré sur  $F_p$
  - rq importance polynôme irréductible pour construction explicite des corps finis:
  - Berlekamp (sur  $F_q$ ?)
  - Nombre de poly irréductibles ?
- ▼ III. 1 Cyclotomie
- Defs poly cyclotomiques
  - Unitaire, de degre  $\phi(n)$
  - Irreductible et degre extension  $Q(\zeta_n)$
- ▼ III.2 Nombres
- ▼ III.3. Polygones réguliers
- DEV 2