205 - Espaces complets. Exemples et applications.

Références	[GOU_ANA], [Hassan], [Briane&Pagès], [Amrani_Fourier], [Queff_TOPO]
Section	Analyse
Date	@30 avril 2025
Statut leçon	Plan détaillé ok REF !
Enseignant	Isabelle Gruais
Développements choisis	Riesz Fisher, Banach-Steinhauss et app série Fourier
Nb choisis	2
Développements	Banach-Steinhauss et app série Fourier, Riesz Fisher, Projection sur un convexe fermé

Rapport de Jury

L'un des intérêts essentiels de la complétude est de fournir des théorèmes d'existence. Les illustrations ne manquent pas : existence de limites, utilisation de la convergence absolue ou normale, théorème du point xe de Picard-Banach et ses applications, prolongement des applications uniformément continues à valeurs dans un espace métrique complet, et leurs innombrables applications.
Le cas particulier des espaces de Hilbert est un riche terrain d'exploration : théorème de projection sur un convexe fermé et ses applications, analyse de Fourier sur le cercle ou sur la droite réelle.
Les espaces Lp peuvent être abordés dans le cadre de cette leçon, mais sous leur angle spécique d'espaces de Banach.
Pour les candidates et candidats solides, le théorème de Baire fournit d'innombrables applications passionnantes. Ils pourront également songer à la théorie des algèbres de Banach, notamment l'algèbre de Wiener des séries de Fourier absolument convergentes, ou à l'espace des fonctions holomorphes sur un ouvert de C muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.

Introduction

→ fournir des théorèmes d'existences de limites notamment

→ assurer la CV d'une suite sans exhiber au préalable sa limite.

Plans

▼ ***Plan***

I. Espaces métriques complets

1. Suites de Cauchy
2. Parties complètes
3. Théorèmes utilisant la complétude

II. Espaces de Banach

1. Définition, ex et prop
2. Théorie de Baire

III. Hilbert

1. Définition
2. Projection sur un convexe fermé et conséquence

▼ ***Plan détaillé***

▼ I.1. Suites de Cauchy

- def suite de cauchy

Propriétés sur les suites de Cauchy

- CV ⇒ CY
- CY ⇒ bornée
- CY + une VA ⇒ CV
- image CY par fct UC est CY + c-ex pas UC (1/x)

▼ I.2. Partie complète

- Dans un em (E,d), une partie A est complète si toute suite de Cauchy de A converge dans A.
- ex: Cb avec distance
- ex où utilise le fait qu'une suite est de CY + espace cplt pour dire qu'elle converge: Banach Alaoglu ?
- Une intersection qlq de complets est complète. Une union finie de complets est complète. Le produit cartésien fini (ou dénombrable) de complets est complet (pour la topologie produit),
en particulier Rn est complet.
- ex ?
- Dans un em complet, les sous-ensembles complets sont les sous-ensembles fermés.
- compacte ⇒ cplt ⇒ fermée

- app: Théorème d'Ascoli: théorème / c-ex /hölderienne /App: Arzela Peano
- Dans un em (E, d), une partie A est complète ssi toute suite décroissante $(F_n)_{n\in N}$ de fermés de A dont le diamètre tend vers zéro, $diam(F_n) \to 0$, a une intersection non vide (et réduite à un point) UTILE ?

▼ I. 3. Théorèmes utilisant la complétude

° Prolongement app uniformément continue

- théo
- Schwarz → L2 pour la transformée de Fourier

° Théorème de Point fixe de Picard

- théorème point fixe + 1 contre ex sans complétude
- app: Cauchy Lipschitz global

▼ II.1. Définition et exemples

- def: Un espace de Banach est un evn complet attention pour la norme + ex C°b(E,F), norme infinie Banach + ex: lp
- c-ex: cc ou Continues

° Séries CVA→ CV

- Banach ssi toute série blablilbla
- app: - Riesz Fischer DEV 1
- Réciproque de Lebesgue
- app transf fourier

- F Banach alors Lc(E,F) Banach
- ex : le dual est un Banach
- appli: inverse avec la somme (attention besoin Banach pour CVA⇒ CV) si de norme plus petit que 1 alors (Id-u) inversible

° Inverses

- prop: Si t'es dans algèbre de Banach (algèbre + Banach) alors Inv(X) ouvert de X + ex ens des endo inversible continues d'inverse continues est un ouvert de Lc(E))

▼ II. 2 Théorie de Baire

→ Gourdon dans l'annexe

- théo de Baire
- app directe: evn avec base denombrable non finie n'est pas complet
- Banach steinhauss + coro CVS + séries de Fourier DEV 2
- théorème application ouverte
- csq Théorème isomophisme de Banach + csq F: f de L1→ coeffs de Fourier n'est pas surjective

▼ III. 1 Définition

→ Hirsh Lacombe

- def eph
- def espace de Hilbert + ex L2, R^n..

▼ III.2. Projection sur un convexe fermé et conséquence

- théorème de projection sur un convexe fermé + annexe

- appl: def espérance conditionnelle
- un contre ex si veut
- théorème du supplémentaire orthogonal
- app critère de densité
- app: théorème de Riesz
- application ? définition de l'adjoint