203 - Utilisation de la notion de compacité.

↗ Références	[Hirsch-Lacombe], [GOU_ANA], [GOU_AGP], [Zully_queff], [Berthelin], [Amrani_Fourier]
Section	Analyse
Date	@11 décembre 2024
Statut leçon	Plan détaillé ok
Enseignant	Bachir Bekka
↗ Développements choisis	Weierstrass / Bernstein par les probas , Théorème d'Ascoli
Nb choisis	2

Rapport de Jury

Introduction

- montrer des existences avec Bolzano Weierstrass (existence d'extremums)
- passer de l'infini au fini: Borel Lebesgue

Plans

▼ ***Plan***

Cadre métrique

I. Notion de compacité

1. Propriété de Borel Lebesgue
2. Propriété de Bolzano Weierstrass

II. Fonctions continues sur un compact

1. Problèmes d'extrema
2. Theo de Heine
3. Points fixes
4. Weierstrass

III. Compacité dans les espaces vectoriels normés

1. En dimension finie
2. En dimension infinie

▼ ***Plan détaillé***

▼ I.1. Propriété de Borel-Lebesgue

→ Gourdon

- def borel lebesgue + ex + passage au complémentaire + quelques prop (réunion intersection, ex: suite et limite)
- suite décroissante de fermés non vide dans un compact ⇒ intersection non vide (BL)

▼ I. 2. Propriété de Bolzano-Weirestrass

→ Gourdon

- th : équivalence compact avec Bolzano weierstrass
- ferme d'un compact, compact fermé bornés c-ex:
- compact de R, de Rn (BW?)
- Compact complet + suite dans un compact avec unique valeur d'adhérence converge (sert pour décomposition polaire)
- application: chaîne de markov; l'ensemble des mesures de proba sur [|1,n|] est un compact + application: P matrice stochastique: il existe proba invariante (exo de Polyyyyy)

▼ II. 1. Extremas

- image continue d'un compact est un compact / bornée continue et atteint ses bornes + Rolle, EAF
- cas où K n'est pas compact → sur/sous niveau + exemple des pavés droits (cf Huguet)
- ex des fcts coercive (Huguet)

▼ II. 2. Theo Heine

→ Gourdon

- Heine
- app ? intégrales de riemmann (poly de Karine)

▼ II.3. Points fixe

→ Gourdon (exo 4)

- strictement contractante avec k=1 et compact ⇒ unique point fixe
- contre ex: espace juste complet
- Ex rombaldi analyse suite cosinus

▼ II. 4. Weierstrass

- weierstrass (+ bernstein)
- app: int de f contre tout poly nul ssi f nulle (rq : important en proba pour le problèmes des moments pour les variables à densité)

▼ III. 1 En dimension finie

- généralites si pas mise avant (dim finie ⇒ normes équivalentes (contre ex dimension infinie) rq: réciproque vraie (Karine).) application : tout sev dim finie est fermé, compactes des Rev de dim finie + app: toute app linéaire en dim est continue (csq equi normes en dim finie)
- riesz + (cex app boule pas compacte pour la bonne norme alpha holder) → peut etre après parce qu'on a besoin d'Ascoli pour montrer la compacité
- espaces de matrices (compacité de On, application à la simplicité de S03, décomposition polaire)

▼ III.2. En dimension infinie

° ascoli

- ascoli + alpha hölder + conte ex sans la compacité et contre ex sans l'équicontinuité

° Equa diff

- Cauchy lispschitz
- cauchy péano rq: perd ici l'unicité (Julien Sabin)
- théorème de sortie de tout compact

- Garder en tête définition séparé hors cadre métrique
- rq image réciproque d'un compact: pas forcément compact ex fct cst sur R